EXPRESS

Bernard Guerrien • Véronique Parel

Micro-économie

1998
DUNOD

Ce manuel présente les modèles de base de la microéconomie, tels qu'ils sont enseignés en L1 et L2. Il s'adresse donc à des étudiants débutants. Une grande importance est accordée à l'interprétation économique des formulations mathématiques – qui sont le trait distinctif de la microéconomie. Il le fait de la façon la plus simple possible (les principales formules et résultats mathématiques à connaître sont donnés en annexe). Il ne cherche pas à donner des « exemples » qui essaient à tout prix d'établir un lien entre microéconomie et vie économique réelle et qui souvent donnent une vision erronée sur la nature des modèles. Les hypothèses de ceux-ci sont, en revanche, clairement explicitées, de façon que l'étudiant puisse se faire une opinion sur leur pertinence – qui est d'ailleurs largement sujette à débat.

ISBN 2 10 003756 0

Table des matières

L'équilibre général

La concurrence imparfaite

1 Biens et paniers de biens

I La notion de bien

La microéconomie s'intéresse essentiellement à la production et à l'échange de biens. Elle doit donc, avant toute chose, préciser ce qu'elle entend par « bien », surtout lorsqu'elle fait appel aux symboles mathématiques (qui supposent des définitions précises, pour l'interprétation des résultats obtenus).

Du point de vue de l'économiste, un bien est caractérisé par trois paramètres :

- ses propriétés physiques ;
- le lieu où il est disponible (sa localisation) ;
- la date à laquelle il est disponible.

Les propriétés physiques peuvent être plus ou moins détaillées (« pomme », ou « pomme golden », etc.) ; la prise en compte de la localisation permet d'envisager des questions telles que le transport des marchandises d'un endroit à un autre ; la date de disponibilité joue un rôle essentiel dès qu'on s'intéresse aux problèmes de délais dans la production et, plus généralement, à tout ce qui a trait à l'épargne et à l'investissement.

Afin de tenir compte de tous ces paramètres, la quantité d'un bien de type j disponible au lieu l et à l'instant t peut – ou devrait – être notée : q_{jlt}.

Toutefois, comme cette notation est particulièrement lourde, on se contente généralement d'écrire q_i au lieu de q_{jlt}, l'indice i pouvant alors désigner, selon le problème étudié, le type de bien, sa localisation ou la date où il est disponible. Sur le plan mathématique, cette simplification n'a pas d'importance. Mais elle peut évidemment en avoir sur le plan économique, la différence entre deux types de biens disponibles « aujourd'hui » pouvant ne pas être de même nature que la différence entre un bien disponible aujourd'hui et un bien disponible à une date ultérieure (en raison, notamment, de l'incertitude sur le futur). D'ailleurs, une des principales caractéristiques de la concurrence parfaite (*cf.* fiche 6) est de gommer cette différence – en supposant que les prix des biens futurs sont connus, comme ceux des biens présents.

II La notion de panier de biens

Dans une économie où il y a n biens différents, éventuellement datés et localisés, on considère des *paniers de biens* de la forme :

$$(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n)$$

où q_i désigne une quantité du bien i ($i = 1, \ldots ,n$) ; il est généralement supposé que cette quantité est positive ou nulle. Par la suite, on désignera par des majuscules les paniers de biens (par exemple : $Q = (q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n)$).

Les paniers de biens à n éléments sont donc des vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$, avec lesquels deux types d'opérations sont possibles :

- la *somme*, qui consiste à additionner deux à deux les quantités des mêmes biens ; soit :

  $$(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n) + (q'_1,\ldots,q'_i,\ldots,q'_n) = (q_1 + q'_1,\ldots,q_i + q'_i,\ldots,q_n + q'_n),$$

  le panier obtenu étant noté $Q + Q'$, si $Q' = (q'_1,\ldots,q'_i,\ldots,q'_n)$;
- l'*homothétie*, ou produit par un scalaire, qui consiste à multiplier par un même nombre (généralement positif) tous les éléments d'un panier de biens ; soit :

  $$k(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n) = (kq_1,\ldots,kq_i,\ldots,kq_n)$$

  le panier obtenu étant noté kQ.

APPLICATION

Dans le cas où il n'y a que deux biens, les opérations avec les paniers de biens peuvent être représentées graphiquement, dans un plan cartésien. Ainsi, dans la figure 1.1, on a représenté les paniers :

$$Q = (1,2)\ ,\ Q' = (3,1)\ ,\ Q + Q' = (4,3)\ ,\ 2Q = (2,4)$$

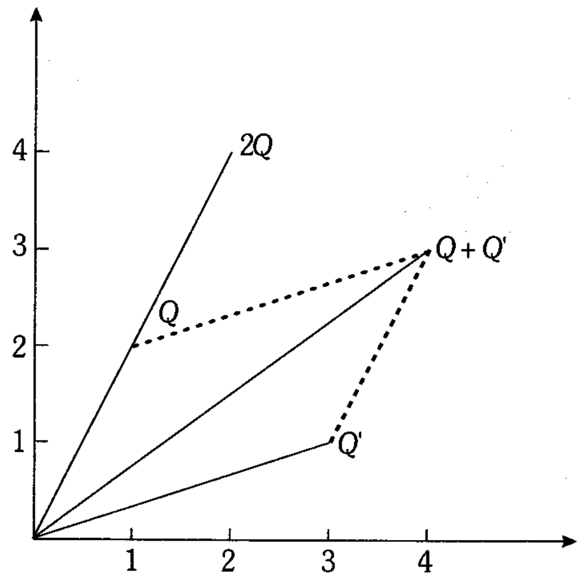

Figure 1.1

III Mélanges de paniers de biens

Les paniers de biens peuvent être additionnés ou multipliés par un scalaire, mais ils peuvent aussi être mélangés. Le panier :

$$\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q'$$

formé en additionnant une moitié du panier Q et une moitié du panier Q', est un exemple de « mélange » des paniers Q et Q'.

De façon plus générale, on appelle *mélange des paniers* Q et Q' toute expression de la forme :

$$\lambda Q + (1 - \lambda)\, Q'$$

où λ est compris entre 0 et 1 (il en est donc de même pour $1 - \lambda$).

L'ensemble des paniers de biens obtenus en mélangeant Q et Q' est représenté graphiquement par un *segment de droite,* qui joint Q à Q'. La figure 1.2 donne un exemple de représentation graphique d'un tel ensemble, dans le cas où il n'y a que deux biens.

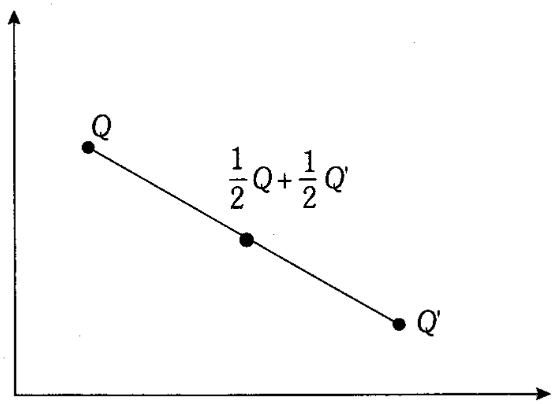

Figure 1.2

IV Contraintes linéaires sur les paniers de biens

En microéconomie, on rencontre souvent le cas où les éléments de certains paniers de biens sont soumis à des contraintes linéaires ; lorsqu'il n'y a que deux biens, celles-ci sont de la forme :

(1.1) $$a_1q_1 + a_2q_2 = c,$$

a_1, a_2 et c étant des nombres donnés (des *paramètres*).

Graphiquement, les paniers (q_1, q_2) qui vérifient (1.1) sont représentés par une droite qui coupe l'axe des abscisses au point c/a_1 (si $a_1 \neq 0$) et celui des ordonnées au point c/a_2 (si $a_2 \neq 0$). Si $a_2 \neq 0$, on peut écrire (1.1) sous la forme :

(1.2) $$q_2 = -\frac{a_1}{a_2}\, q_1 + c.$$

La droite dont l'équation est (1.2) a pour pente $-a_1/a_2$; elle est donc perpendiculaire au vecteur (a_1, a_2). Ainsi, lorsqu'on représente graphiquement une droite dont l'équation est de la forme (1.2), il peut être utile de faire apparaître ses *coefficients directeurs* a_1 et a_2 ; pour cela, on représente le vecteur (a_1, a_2), issu de l'origine, et perpendiculaire à la droite, comme dans la figure 1.3. Réciproquement, la connaissance du vecteur des coefficients directeurs d'une droite et d'un point Q de celle-ci suffit pour la tracer (pour cela, on élève, à partir du point Q, la perpendiculaire au vecteur des coefficients directeurs).

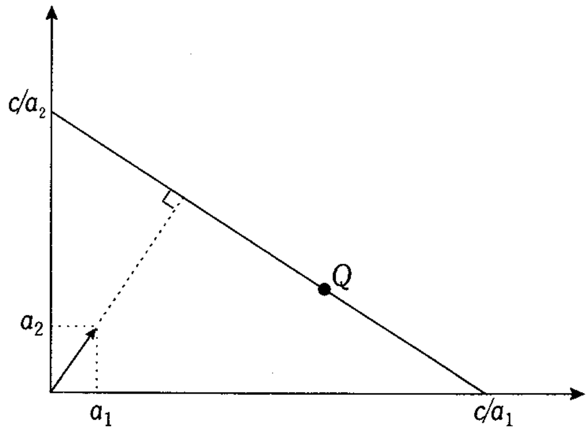

Figure 1.3

2 Le consommateur : l'approche ordinale

Le consommateur – ou *ménage* – est une des unités de décision essentielles de la micro-économie (l'autre étant le producteur).

Il est caractérisé par sa dotation initiale et ses goûts.

La *dotation initiale* du consommateur est l'ensemble des ressources dont il dispose, pour sa consommation ou pour faire des échanges. Pour un système de prix donné, la valeur prise par la dotation initiale est le *revenu* du consommateur (ou sa *richesse*, si les biens futurs sont pris en compte dans la dotation initiale).

Les *goûts du consommateur* sont décrits par sa *relation de préférence*, qui fournit un classement des paniers de biens.

I La relation de préférence

Une relation binaire $\succcurlyeq$ est une relation de préférence sur un ensemble de paniers de biens si elle a les deux propriétés suivantes, quels que soient les paniers de biens Q, Q' et Q'' :

- $Q \succcurlyeq Q$ (elle est *réflexive*) ;
- Si $Q \succcurlyeq Q'$ et $Q' \succcurlyeq Q''$, alors $Q \succcurlyeq Q''$ (elle est *transitive*).

La première propriété (réflexivité) est triviale ; en revanche, la seconde (transivité) est une condition de cohérence (ou de rationalité) : si on préfère le panier Q au panier Q', et si celui-ci est préféré à Q'', alors il est « rationnel » – ou cohérent – de préférer Q à Q''.

Une relation ayant les propriétés 1 et 2 est, par définition, un *préordre*. Si l'ensemble des paniers de biens qu'elle permet de classer est l'ensemble des paniers de biens possibles, alors elle est un préordre *complet* (ou *total*).

Le modèle du consommateur suppose que sa relation de préférence est un préordre complet : le consommateur peut classer tous les paniers de biens possibles, pris deux à deux, et ce classement est cohérent (transitif).

Si la relation $\succcurlyeq$ est un préordre, et non un ordre, c'est parce qu'elle n'exclut pas que l'on ait *à la fois*, $Q \succcurlyeq Q'$ et $Q' \succcurlyeq Q$, sans que cela implique que $Q = Q'$. Si deux paniers différents Q et Q' sont tels que $Q \succcurlyeq Q'$ et $Q' \succcurlyeq Q$, alors on dit qu'ils sont *équivalents*, ou *indifférents*, pour le consommateur. Ce qu'on note :

$$Q \sim Q' \text{ (ou } Q' \sim Q)$$

Si un panier Q est préféré à un panier Q' sans lui être équivalent, alors on dit qu'il lui est *strictement préféré*, et on note $Q \succ Q'$.

II Courbes d'indifférence associées à une relation de préférence

Dans le cas où les paniers ne comportent que deux biens (les quantités des autres biens pouvant être considérées comme fixées), on appelle *courbe d'indifférence* relative à ces deux biens, et à un panier Q donné, la courbe qui relie les paniers de biens qui sont équivalents à Q pour le consommateur. On note I_Q cette courbe.

APPLICATIONS

1. Soit un consommateur non fumeur qui aime les pommes (entières ou en morceaux). Dans un système d'axes où il y a, en abscisses, des quantités de cigarettes et, en ordonnées, des quantités de pommes, les courbes d'indifférence de ce consommateur sont des droites parallèles à l'axe des abscisses (puisque le fait qu'un panier comporte peu ou beaucoup de cigarettes laisse indifférent le consommateur). Ce cas est décrit dans la figure 2.1*a*.

Dans le cas d'un consommateur fumeur et qui n'aime pas les pommes, les courbes d'indifférence sont alors des droites « verticales » (parallèles à l'axe des ordonnées). Ce cas est décrit dans la figure 2.1*b*.

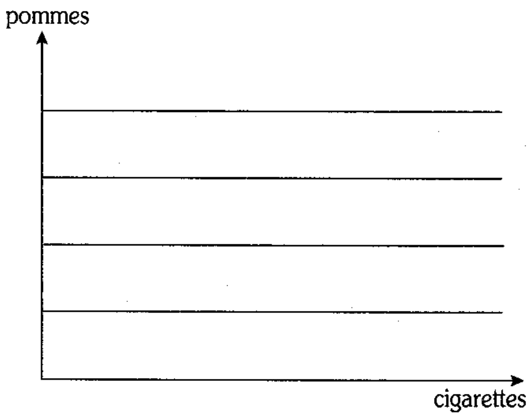

Figure 2.1*a*

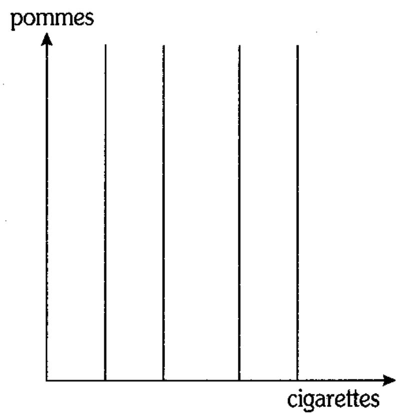

Figure 2.1*b*

Les cas 2.1*a* et 2.1*b* sont des cas extrêmes ; en règle générale, il est supposé que le consommateur apprécie tous les biens pris en compte dans sa relation de préférence, comme dans l'application suivante.

2. Soit un consommateur pour lequel il est équivalent de consommer (boire) q litres d'eau gazeuse ou q litres de limonade (eau gazeuse et limonade sont des *substituts parfaits*). Sa relation de préférence est donc telle que le panier (q_1, q_2) est considéré comme équivalent au panier (q_1', q_2') – où 1 désigne l'eau gazeuse et 2 la limonade – si et seulement s'il comporte autant de liquide (eau gazeuse ou limonade) que lui. Autrement dit :

$$(q_1, q_2) \sim (q_1', q_2') \Leftrightarrow q_1 + q_2 = q_1' + q_2'.$$

Les courbes d'indifférence sont dans ce cas des droites dont la pente est égale à -1, telles celles qui sont tracées dans la figure 2.2.

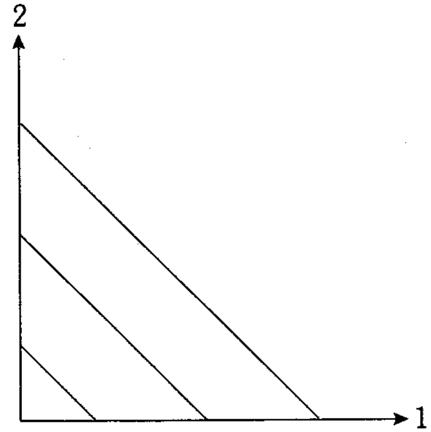

Figure 2.2

L'ensemble des courbes d'indifférence relatives à une relation de préférence est appelé *carte d'indifférence*. Il résulte de la transitivité de la relation de préférence (condition de rationalité) que *deux courbes d'indifférence d'une même carte d'indifférence n'ont pas de point commun (elles ne se coupent pas).*

Cette propriété vaut pour les *surfaces d'indifférence*, qui sont l'équivalent des courbes d'indifférence dans le cas où il y a plus de deux biens.

III Les hypothèses usuelles sur la relation de préférence

A. Monotonie (ou non saturation)

La monotonie signifie que le consommateur préfère toujours « en avoir plus que moins » : si on lui propose un panier Q' plus fourni qu'un autre, Q, alors il opte pour Q'. Ce qui s'écrit :

$$(q_1' \geqslant q_1, \dots , q_n' \geqslant q_n) \Rightarrow (q_1', \dots ,q_n') \succsim (q_1, \dots ,q_n),$$

la préférence étant stricte s'il existe au moins un bien i pour lequel $q_i' > q_i$ $(1 \leqslant \ \leqslant n)$.

La monotonie des préférences a pour conséquence que *les courbes d'indifférence sont décroissantes*. Pour le prouver, considérons un panier quelconque $Q = (q_1, q_2)$ et la courbe d'indifférence I_Q sur laquelle il se trouve. Si on augmente de $\Delta q_1 > 0$ la quantité de bien 1, alors on obtient le panier $Q' = (q_1 + \Delta q_1, q_2)$, qui est *strictement préféré à* Q (en raison de la monotonie des préférences) et qui n'est donc pas sur I_Q. Pour « revenir » à cette courbe, il faut donc retirer du panier Q' une certaine quantité Δq_2 du bien 2 ; le panier obtenu Q'' étant *en-dessous* de Q', la décroissance de I_Q s'ensuit. La figure 2.3 illustre ce qui vient d'être dit :

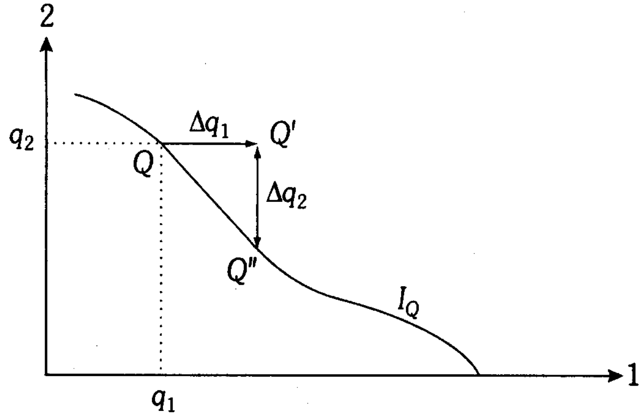

Figure 2.3

Une autre conséquence de la monotonie des préférences est que les paniers de biens qui se trouvent au-dessus d'une courbe d'indifférence donnée sont préférés aux paniers de cette courbe (qui sont, eux, préférés aux paniers en-dessous de la courbe). Lorsqu'il y a monotonie des préférences, toute courbe d'indifférence partage donc le plan (cadran positif) en deux parties : l'une (« au-dessus » de la courbe) qui donne les paniers préférés à ceux de la courbe, l'autre (« en-dessous ») où se trouvent les paniers auxquels ceux de la courbe sont préférés.

B. Convexité des préférences

Il y a convexité des préférences lorsque les courbes d'indifférences sont convexes (*cf.* fiche 26). Ce qui s'écrit, formellement :

$$Q \sim Q' \Rightarrow \lambda Q + (1 - \lambda)Q' \succsim Q \text{ (ou } Q'), \ \forall \lambda \in [0,1].$$

La convexité des préférences signifie donc que le consommateur préfère aux paniers équivalents Q et Q' le « mélange » formé par une fraction λ du panier Q et la fraction $1 - \lambda$ du panier Q' (λ étant compris entre 0 et 1). Elle traduit donc une « préférence pour les mélanges » du consommateur (dans la figure 2.4, le « mélange » $\lambda Q + (1 - \lambda)Q'$ est *strictement* préféré à Q et à Q' : on dit que la convexité des préférences est *stricte*).

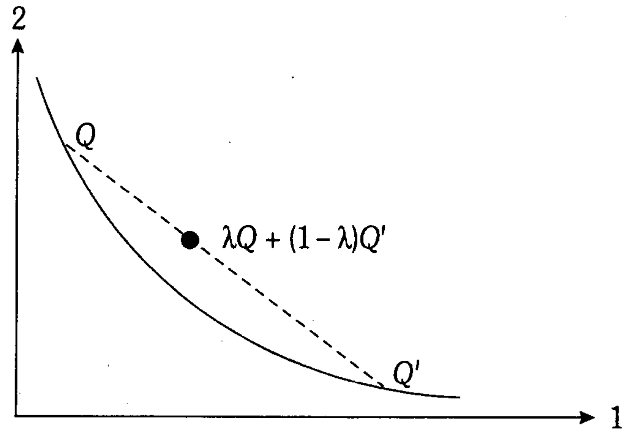

Figure 2.4

C. Désirabilité

Il y a désirabilité d'un bien lorsque le consommateur préfère un panier comportant une quantité, aussi petite que l'on veut (mais non nulle) de ce bien à tout panier ne comportant pas ce bien.

La traduction graphique de la désirabilité d'un bien est que les courbes d'indifférence sont asymptotes à l'axe qui représente la quantité de ce bien.

Lorsqu'il y a désirabilité pour tous les biens et convexité (stricte) des préférences, alors les courbes d'indifférence sont « de type hyperbolique », comme dans la figure 2.4.

D. Continuité

La continuité est une propriété qui intéresse surtout les mathématiciens, car elle intervient lors de la démonstration sur l'existence d'une fonction d'utilité associée à la relation de préférence du consommateur (*cf.* fiche 3). Elle dit que si tous les éléments d'une suite de paniers de biens sont préférés à un panier de bien (quelconque) Q, et si cette suite converge vers un panier Q', alors Q' est préféré à Q.

IV Le taux marginal de substitution

Un taux de substitution entre deux biens, relatif à un panier de biens Q donné, est un *taux d'échange* qui permet de rester sur la courbe d'indifférence où se trouve Q. Par exemple, dans la figure 2.3, le rapport $|\Delta q_2/\Delta q_1|$ est le taux de substitution entre les paniers Q et Q'', tous deux sur la courbe d'indifférence I_Q. Comme celle-ci est décroissante (on a donc supposé qu'il y a monotonie des préférences), Δq_2 et Δq_1 sont de signes opposés ; c'est pourquoi on prend la valeur absolue de leur rapport pour mesurer le taux de substitution (il est plus pratique de raisonner avec des taux d'échange positifs).

Les taux de substitution dépendent donc du panier de biens de référence Q, mais aussi des quantités échangées. Ainsi, dans la figure 2.5, aux deux accroissements Δq_1 et $\Delta^\circ q_1$ correspondent des taux de substitution $-\Delta q_2/\Delta q_1$ et $-\Delta^\circ q_2/\Delta^\circ q_1$ différents (ces taux sont mesurés graphiquement par la pente, au signe près, des segments de droite joignant Q à Q'' et à Q°).

Pour éviter le problème de la multiplicité des taux d'échange en Q, on effectue un *passage à la limite*, en faisant tendre Δx_1 vers 0, le nombre obtenu (s'il existe) étant alors appelé *taux marginal de substitution en* Q et noté $TMS_{2/1}(Q)$. Graphiquement, le taux marginal de substitution est donc donné par la valeur absolue de la *pente de la tangente en* Q *à la courbe d'indifférence sur laquelle se trouve* Q.

On peut voir dans le taux marginal de substitution un taux d'échange, puisque c'est une limite de taux d'échange, même si la limite est une opération purement mathématique, non accessible à l'intuition.

Lorsque les courbes d'indifférence sont convexes, donc lorsque le consommateur « aime les mélanges », si un panier de biens comporte « peu » du bien 1 et (relativement) beaucoup du bien 2, alors le consommateur est prêt à céder (relativement) beaucoup de bien 2 contre un peu de bien 1 : son taux marginal de substitution est élevé. Il diminue toutefois au fur et à mesure que la quantité du bien 2 augmente, et que celle du bien 1 diminue (on reste sur la même courbe d'indifférence). Convexité des préférences et décroissance du taux marginal de substitution sont donc des propriétés équivalentes.

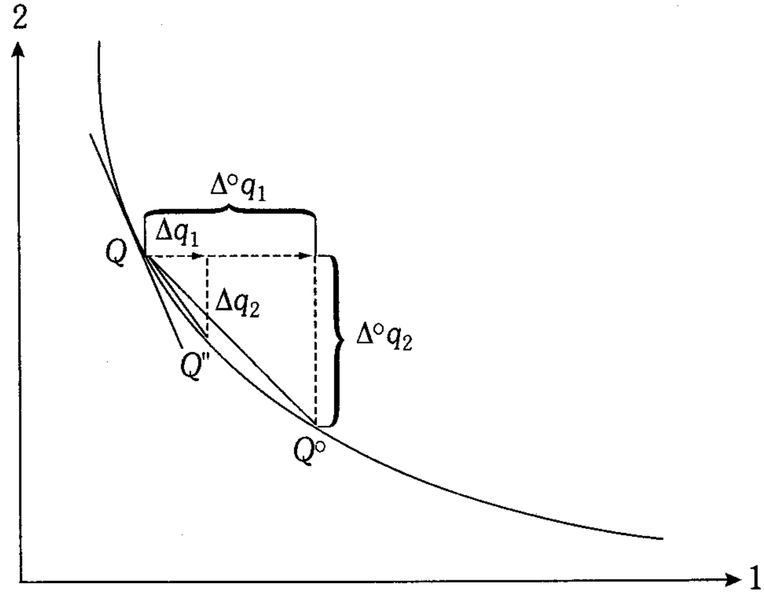

Figure 2.5

APPLICATIONS

1. Si on reprend l'exemple du non fumeur qui aime les pommes, alors son taux marginal de substitution pommes-cigarettes est nul (le consommateur n'est pas disposé à donner une part de pomme, aussi petite soit-elle, pour obtenir une cigarette).
2. Dans le cas du fumeur qui n'aime pas les pommes, le taux marginal de substitution pommes-cigarettes est infini (le consommateur est prêt à échanger un nombre illimité de pommes contre une cigarette).
3. Dans le cas des substituts parfaits, eau gazeuse-limonade (figure 2.2), le taux marginal de substitution est égal à 1, quel que soit le panier envisagé.

3 Le consommateur : l'approche par les fonctions d'utilité

La relation de préférence permet de *classer* les paniers de biens : elle caractérise les goûts du consommateur. Comme elle est, cependant, d'un maniement peu aisé, on cherche à lui associer une *fonction d'utilité,* qui représente aussi ces goûts, mais de façon plus simple.

Une fonction d'utilité est une fonction – au sens mathématique – qui attribue à chaque panier de biens un nombre (réel), dont on suppose généralement qu'il est positif. Les nombres attribués doivent être tels qu'ils respectent le classement opéré par la relation de préférence ; si le panier Q est (strictement) préféré au panier Q', alors le nombre attribué à Q doit être (strictement) supérieur à celui qui est attribué à Q', le même étant attribué à des paniers équivalents (indifférents pour le consommateur).

Si on note $U(\cdot)$ une fonction d'utilité associée à la relation de préférence $\succsim$, on doit donc avoir :

$$\begin{cases} Q \succsim Q' & \Leftrightarrow \quad U(Q) \geqslant U(Q') \\ Q \sim Q' & \Leftrightarrow \quad U(Q) = U(Q'). \end{cases}$$

Le nombre $U(Q)$ est appelé *utilité du panier Q*.

APPLICATION

Soit un consommateur non fumeur mais qui aime les pommes, sans limite (*cf.* fiche 2). Si q_1 désigne une quantité de pommes et q_2 une quantité de cigarettes, alors la fonction $U(\cdot)$ telle que :

$$U(q_1,q_2) = q_1,$$

est une fonction d'utilité qui représente les goûts de ce consommateur (plus un panier comporte de pommes, et mieux il est classé, quel que soit le nombre de cigarettes qu'il comporte).

On remarque, cependant, que les fonctions qui associent au panier (q_1,q_2) les réels aq_1 ou $q_1{}^a$, avec $a > 0$, sont aussi des fonctions d'utilité qui représentent les goûts de ce consommateur. De façon plus générale, si $f(\cdot)$ est une fonction numérique quelconque strictement croissante, alors la fonction composée $f(U(\cdot))$ classe les paniers de biens de la même manière que la fonction d'utilité $U(\cdot)$; $f(U(\cdot))$ représente donc la même relation de préférence que $U(\cdot)$. Autrement dit, une infinité de fonctions d'utilité peuvent représenter une même relation de préférence ; elles se déduisent les unes des autres par des fonctions numériques strictement croissantes.

Si on n'utilise les fonction d'utilité que pour classer les paniers de biens, alors on dit qu'on adopte un point de vue *ordinal*, comme avec la relation de préférence (que ces fonctions ne font que représenter). Mais si on privilégie une fonction d'utilité particulière parmi toutes celles qui peuvent représenter la relation de préférence du consommateur, et si on donne une signification aux nombres que cette fonction d'utilité attribue aux paniers de biens («plaisir», «satisfaction»,...), alors on dit qu'on adopte un point de vue *cardinal*.

II Courbe d'indifférence et taux marginal de substitution (TMS)

Étant donné une fonction d'utilité $U(\cdot)$ et un panier de biens quelconque Q_0, la courbe d'indifférence passant par Q_0 est formée par l'ensemble I_{Q_0} des paniers de biens Q tels que :

(4.1) $$U(Q) = U(Q_0).$$

Si on pose $U(Q_0) = U_0$, alors on dit que le panier de biens Q tel que $U(Q) = U_0$ appartient à la courbe d'indifférence de niveau U_0.

Comme les courbes d'indifférence représentent des paniers de deux biens, on a $Q = (q_1,q_2)$ et l'équation (4.1) s'écrit (en posant : $U(Q_0) = U_0$) :

(4.2) $$U(q_1,q_2) = U_0.$$

Cette égalité établit une relation entre les quantités q_1 et q_2, dont la courbe d'indifférence est l'expression graphique ; relation qu'on notera $q_2 = g(q_1)$ ($g(\cdot)$ est donc la *fonction implicite* relative à l'équation (4.2) – *cf.* fiche 26). En remplaçant q_2 par $g(q_1)$ dans l'équation (4.2), celle-ci s'écrit :

(4.3) $$U(q_1,g(q_1)) = U_0.$$

La figure 3.1 illustre ce qui vient d'être dit :

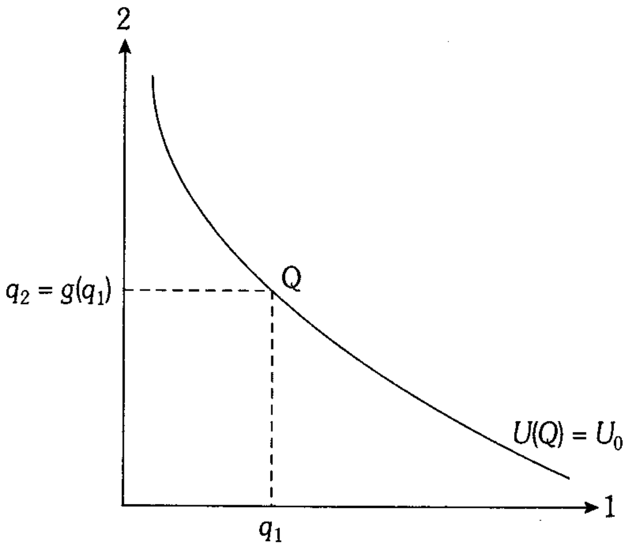

Figure 3.1

En dérivant (par rapport à q_1) les deux membres de (4.3) , il vient (*cf.* fiche 26, « dérivation en chaîne ») :

$$U'_{q_1}(q_1,g(q_1)) + U'_{q_2}(q_1,g(q_1)) \times g'(q_1)=0,$$

et donc, en tenant compte de ce que $q_2 = g(q_1)$, et en supposant $U_{q_2}(q_1,q_2) \neq 0$:

$$g'(q_1) = -\frac{U'_{q_1}(q_1,q_2)}{U'_{q_2}(q_1,q_2)}. \tag{4.4}$$

Or, on a vu dans la fiche 2, que la dérivée $g'(q_1)$ – pente de la tangente en $Q = (q_1,q_2)$ à la courbe d'indifférence – donne, par définition (au signe près), le *taux marginal de substitution* en Q du bien 2 relativement au bien 1 (taux noté $\text{TMS}_{2/1}$). Il résulte donc de cette définition et de la relation (4.4) que :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \frac{U'_{q_1}(q_1,q_2)}{U'_{q_2}(q_1,q_2)}. \tag{4.5}$$

Comme le taux marginal de substitution est une notion ordinale – propre aux courbes d'indifférence –, qui ne dépend donc pas de la fonction d'utilité retenue pour représenter la relation de préférence du consommateur, l'égalité (4.5) est valable – elle donne toujours le même nombre – *quelle que soit la fonction d'utilité $U(\cdot)$ retenue pour représenter la relation de préférence.*

Dans le cas général, où il y a n biens, on a de la même façon pour une fonction d'utilité $U(\cdot)$ dérivable et à dérivées non nulles en Q :

$$\text{TMS}_{i/j}(Q) = \frac{U'_{q_j}(Q)}{U'_{q_i}(Q)} \qquad i = 1,\ldots,n\ ,\ j = 1,\ldots,n.$$

La dérivée partielle $U'_{q_i}(Q)$ est appelée *utilité marginale* du bien i, pour le panier de biens Q. Le taux marginal de substitution entre deux biens est donc obtenu en faisant le rapport de leurs utilités marginales.

III Propriétés de la fonction d'utilité déduites de celles de la relation de préférence

A. Monotonie

$U(\cdot)$ est une fonction strictement croissante par rapport à chacune de ses variables. Dans le cas où la fonction d'utilité est dérivable, la monotonie signifie que ses dérivées partielles (utilités marginales) sont strictement positives.

B. Convexité des préférences

Dans le cas où une fonction d'utilité $U(\cdot)$ représente une relation de préférence convexe, alors on a :

$$U(Q) = U(Q') \Rightarrow (U(\lambda Q + (1-\lambda)Q') \geqslant U(Q)(= U(Q')),\ \ \forall \lambda \in [0,1]).$$

On dit d'une fonction d'utilité qui a cette propriété qu'elle est *quasi concave*. La quasi-concavité signifie donc que le consommateur « aime les mélanges » (*cf.* fiche 2).

APPLICATIONS

1. La relation de préférence représentée par la fonction d'utilité $U(\cdot)$ – dite de Cobb-Douglas – définie par :

$$U(q_1,q_2) = q_1^{\alpha}q_2^{\beta}, \text{ avec } \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

peut aussi être représentée par les fonctions $V_k(\cdot)$ définies par :

$$V_k(q_1,q_2) = [U(q_1,q_2)]^k \ (= q_1^{k\alpha}q_2^{k\beta}),\ \ k > 0,$$

ou par la fonction $W(\cdot)$ définie par (pour $q_1 > 0$, $q_2 > 0$) :

$$\begin{aligned} W(q_1,q_2) &= \ln U(q_1,q_2) \\ &= \alpha \ln q_1 + \beta \ln q_2 \end{aligned}$$

puisque les fonctions « puissance k » (avec $k > 0$) et « logarithme népérien » sont strictement croissantes.

La fonction $W(\cdot)$ est dite « loglinéaire », car c'est une fonction linéaire par rapport aux logarithmes des variables considérées.

Comme la fonction $U(\cdot)$ est strictement croissante par rapport à chacune de ses deux variables, elle est monotone ; ses courbes d'indifférence sont donc strictement décroissantes.

Elles sont, en outre, de type hyperbolique (convexes et asymptotes aux axes) ; en effet, comme la courbe d'indifférence relative à une utilité U_0 quelconque vérifie par définition l'équation :

$$q_1^{\alpha}q_2^{\beta} = U_0$$

il s'ensuit qu'on a (pour $q_1 > 0$) :

$$q_2 = \frac{U_0^{1/\beta}}{q_1^{\alpha/\beta}}.$$

La figure 3.2 donne le graphe d'une fonction de ce type, convexe et asymptote aux deux axes.

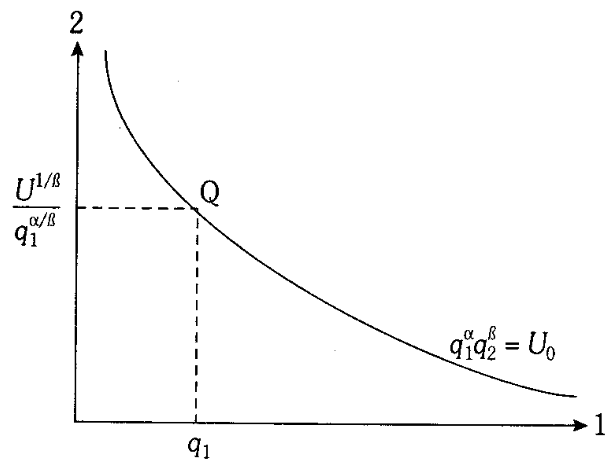

Figure 3.2

Le calcul du taux marginal de substitution, rapport des utilités marginales, est le plus simple avec la fonction d'utilité $W(\cdot)$, dont les dérivées sont α/q_1 et β/q_2. On a donc, dans le cas présent, pour $q_1 \neq 0$:

$$\mathrm{TMS}_{2/1}\,(q_1,q_2) = \frac{\alpha q_2}{\beta q_1}.$$

Lorsqu'on parcourt une courbe d'indifférence de gauche à droite, q_1 augmentant de 0^+ à $+\infty$, le taux marginal de substitution décroît, de $+\infty$ à 0.

2. Soit la fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par :

$$U(q_1,q_2) = q_1{}^{\alpha} + q_2{}^{\beta}, \quad 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1.$$

Cette fonction est *additivement séparable*, ce qui implique que l'utilité marginale de chaque bien ($\alpha q_1{}^{\alpha-1}$ pour le bien 1 et $\beta q_2{}^{\beta-1}$ pour le bien 2) ne dépend que de la quantité consommée de ce bien. Ces utilités marginales sont strictement décroissantes, du fait qu'on suppose $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$.

$U(\cdot)$ étant une fonction strictement croissante par rapport à q_1 et à q_2, les courbes d'indifférence sont strictement décroissantes.

Le taux marginal de substitution, $\mathrm{TMS}_{2/1}(q_1,q_2)$, rapport des utilités marginales, est égal à (pour $q_2 \neq 0$) :

$$\frac{\alpha q_1{}^{\alpha-1}}{\beta q_2{}^{\beta-1}}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ et comme $0 < \beta < 1$, il décroît de $+\infty$ à 0 lorsque q_1 augmente de 0^+ à $+\infty$. Les courbes d'indifférences sont donc convexes. Elles ne sont toutefois pas asymptotes aux axes ; en fait, elles leur sont tangentes aux points où elles les touchent. La figure 3.3 donne un exemple d'un tel type de courbe d'indifférence.

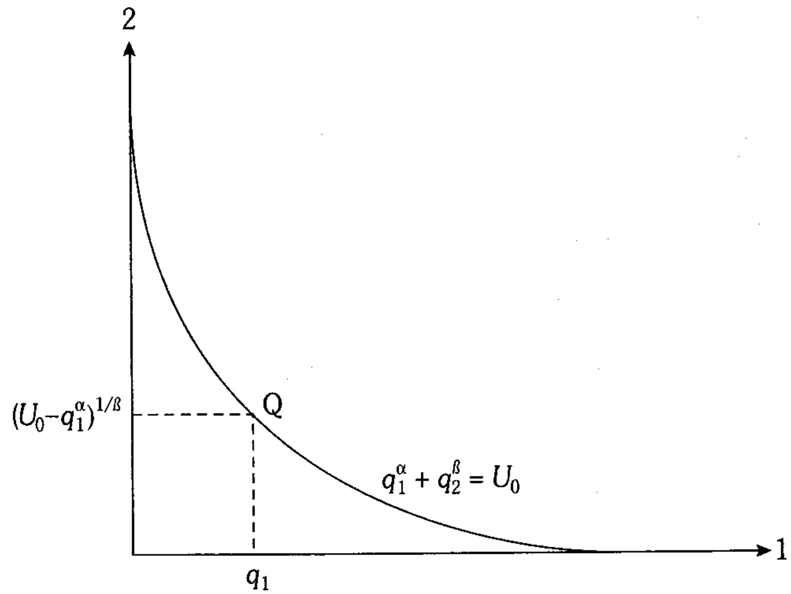

Figure 3.3

4 Producteur et fonction de production

Le producteur – ou l'entreprise – est caractérisé par un *ensemble de production*, catalogue des techniques dont il peut disposer (ou dont il dispose). À partir de l'ensemble de production, on définit la *fonction de production*, qui associe à chaque panier d'inputs (travail, matières premières, « services » fournis par les équipements, etc.) la *quantité maximum de produit* qui peut être obtenue à partir de ces inputs, à condition de choisir la technique la plus appropriée de l'ensemble de production. Si $f(\cdot)$ est une fonction de production et si $Q = (q_1,\ldots,q_n)$ est un panier d'inputs, alors $q = f(q_1,\ldots,q_n)$ donne, par définition, la quantité maximum de produit qui peut être obtenue à partir de Q.

Si la fonction de production est dérivable, alors on appelle *productivité marginale* du i-ème input sa dérivée partielle par rapport à sa i-ème variable. Soit :

$$\text{productivité marginale en } Q \text{ de l'input } i : f'_{q_i}(Q).$$

En règle générale, on suppose que les productivités marginales sont positives – une augmentation de la quantité d'un input quelconque entraîne une augmentation de la production – et décroissantes, ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ll} f'_{q_i}(\cdot) > 0 & \quad i = 1,\ldots,n \\ f''_{q_i^2}(\cdot) < 0 & \quad i = 1,\ldots,n \end{array}$$

I Isoquantes

La notion d'isoquante est l'équivalent, dans la théorie du producteur, de celle de courbe d'indifférence, dans la théorie du consommateur (*cf.* fiche 2). Dans le cas où il n'y a que deux inputs, notés 1 et 2 (les quantités des autres inputs pouvant être considérées comme fixées), l'isoquante relative à la production q est donc formée par l'ensemble des paniers d'inputs (q_1,q_2) tels que :

$$f(q_1,q_2) = q.$$

À partir de la notion d'isoquante on définit celle de taux marginal de susbstitution (TMS) entre deux inputs (comme on le fait à partir de la notion de courbe d'indifférence) : c'est un taux d'échange entre inputs qui permet de maintenir, tout au plus et en utilisant les techniques appropriées, la quantité produite (en restant sur la même isoquante). Si la fonction de production $f(\cdot)$ est dérivable, avec des productivités marginales strictement positives, alors le taux marginal de substitution entre l'input 2 et l'input 1, au panier $Q = (q_1,q_2)$, est donné par le rapport de ces productivités marginales, en Q. Soit :

$$\mathrm{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \frac{f'_{q_1}(q_1,q_2)}{f'_{q_2}(q_1,q_2)}.$$

Si ce taux décroît lorsqu'on parcourt de gauche à droite une isoquante, alors celle-ci est convexe. Un cas limite est celui où les isoquantes sont des droites ; on dit alors que les inputs sont des substituts parfaits, le TMS étant constant, quel que soit le panier d'inputs considéré. La fonction de production est, dans ce cas, de la forme : $f(q_1,q_2) = aq_1 + bq_2$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

Un autre cas limite est celui où les isoquantes sont « en L » (elles sont formées de deux demi-droites parallèles aux axes) ; on dit alors que les deux inputs sont *strictement complémentaires*. La fonction de production est, dans ce cas, de la forme : $f(q_1,q_2) = \min\{a/q_1, b/q_2\}$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

Dans la figure 4.1, on a représenté ces deux cas limites, 4.1*a* et 4.1*c*, et un cas intermédiaire, 4.1*b*.

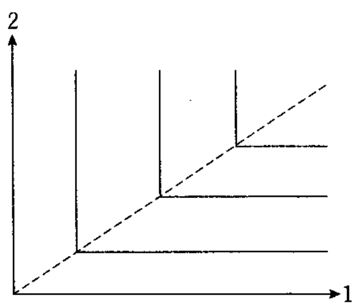

Figure 4.1*a*

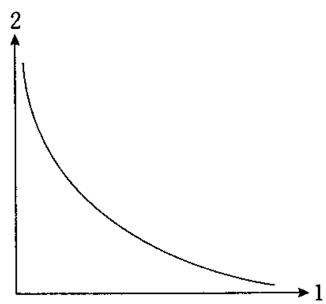

Figure 4.1*b*

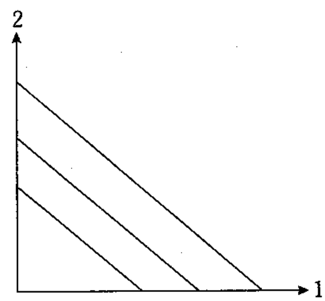

Figure 4.1*c*

Une condition suffisante pour que les isoquantes soient convexes, dans le cas d'une fonction de production de classe C^2, est que les productivités marginales soient décroissantes (soit $f''_{q_i^2}(\cdot) < 0$) et que la dérivée seconde croisée $f''_{q_iq_j}(\cdot)$ soit strictement négative.

Lorsque la fonction de production est homogène (de degré k), les productivités marginales sont aussi homogènes (de degré $k-1$) ; par conséquent, ses taux marginaux de substitution (TMS) – rapports de productivités marginales –, sont homogènes de degré 0 (puisque $f'_{q_1}(\lambda q_1,\lambda q_2)/f'_{q_2}(\lambda q_1,\lambda q_2) = \lambda^{k-1} f'_{q_1}(q_1,q_2)/\lambda^{k-1} f'_{q_2}(q_1,q_2) = f'_{q_1}(q_1,q_2)/f'_{q_2}(q_1,q_2)$). On a donc, en particulier : $\mathrm{TMS}_{2/1}(\lambda q_1,\lambda q_2) = \lambda^0 \mathrm{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \mathrm{TMS}_{2/1}(q_1,q_2)$. D'où, en posant $\lambda = 1/q_2$ (et en supposant $q_2 \neq 0$) :

$$\mathrm{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \mathrm{TMS}_{2/1}(\frac{q_1}{q_2},1).$$

Il s'ensuit que le TMS en un panier quelconque d'une fonction de production homogène ne dépend que du rapport q_1/q_2, donc de la pente de la droite joignant ce panier à l'origine. Autrement dit, le TMS est le même le long de tout « rayon » issu d'origine, comme dans le cas décrit dans la figure 4.2 (les isoquantes sont alors *homothétiques*).

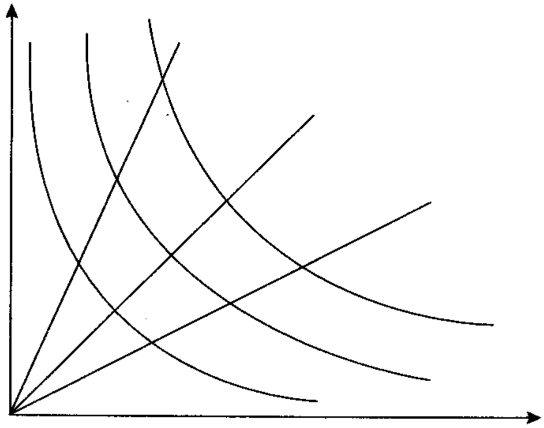

Figure 4.2

III Les rendements d'échelle

La notion de rendements d'échelle apparaît dès qu'on s'intéresse aux effets sur la production d'une variation simultanée et dans la même proportion de *tous les inputs*. La nature des rendements d'échelle se détermine en comparant le taux de croissance des inputs, noté λ (en supposant $\lambda > 1$), au taux de croissance de la production, $f(\lambda Q)/f(Q)$ (en supposant $f(Q) \neq 0$). Ce qui revient à étudier le signe de la différence entre ces deux taux, $f(\lambda Q)/f(Q) - \lambda$, et donc le signe de la différence $f(\lambda Q) - \lambda f(Q)$ (puisque la production $f(Q)$ ne peut qu'être positive). Ainsi, on dit que :

- les rendements d'échelle sont *croissants* en Q si $f(\lambda Q) - \lambda f(Q) > 0$, pour tout $\lambda > 1$;
- les rendements d'échelle sont *constants* en Q si $f(\lambda Q) - \lambda f(Q) = 0$, pour tout $\lambda > 1$;
- les rendements d'échelle sont *décroissants* en Q si $f(\lambda Q) - \lambda f(Q) < 0$, pour tout $\lambda > 1$.

Un cas où la détermination des rendements d'échelle est particulièrement simple est celui où la fonction de production est *homogène de degré k* (c'est-à-dire, où on a $f(\lambda Q) = \lambda^k f(Q)$, pour tout $\lambda > 0$). En effet, dans ce cas, et ce quel que soit Q :

- les rendements d'échelle sont croissants si $k > 1$;
- les rendements d'échelle sont constants si $k = 1$;
- les rendements d'échelle sont décroissants si $k < 1$.

Si la fonction de production est strictement concave (*cf.* fiche 26), alors ses rendements d'échelle sont décroissants ; si elle est, en outre, dérivable, alors ses productivités marginales sont aussi strictement décroissantes. Une condition suffisante pour qu'une fonction de production de classe C^2 à deux inputs soit strictement concave est que ses productivités marginales soient décroissantes ($f''_{q_i^2}(\cdot) < 0$, $i = 1,2$) et que :

$$f''_{q_1^2}(\cdot)\, f''_{q_2^2}(\cdot) - [f''_{q_i q_j}(\cdot)]^2 > 0.$$

III Élasticité de substitution

Le taux marginal de substitution donne la valeur absolue de la pente d'une isoquante ; dans le cas d'une fonction de production homogène, nous avons vu que ce taux ne dépend que du rapport entre les quantités des deux inputs considérés (leur part relative). L'*élasticité de substitution* est un indicateur de la façon dont cette part relative varie le long d'une isoquante, dont la pente est donnée – au signe près – par le TMS. Il est surtout utilisé lorsque les inputs sont le « capital », K, et le travail, L. Comme, en concurrence parfaite (*cf.* fiche 6), le choix du producteur est tel qu'il égalise ses taux marginaux de substitution aux rapports des prix (*cf.* fiche 12), l'élasticité de substitution capital-travail est alors un indicateur des variations du capital par tête $k = K/L$ en fonction de celles du prix relatif du travail et du capital. On la note $\sigma(k)$.

En retenant la notation (K,L) pour les inputs, on a donc, en posant $tms(k) = \text{TMS}_{K/L}(k,1)$ (la fonction de production étant homogène, le TMS l'est aussi, et de degré 0, de sorte que $\text{TMS}_{K/L}(K,L) = \text{TMS}_{K/L}(K/L,1) = \text{TMS}_{K/L}(k,1)$) :

$$\sigma(k) = \lim_{\Delta tms(k) \to 0} \frac{\Delta k / k}{\Delta tms(k) \ / \ tms(k)} \qquad [4.1]$$

D'où, en réarrangeant les termes du rapport qui se trouve dans le membre de droite de (4.1) et en passant à la limite :

$$\sigma(k) = \lim_{\Delta tms(k) \to 0} \frac{tms(k)}{k(\Delta tms(k) \ / \ \Delta k)} \qquad [4.2]$$

$$= \frac{tms(k)}{k \times tms'(k)}.$$

APPLICATIONS

1. Soit la fonction de production dite « de Cobb-Douglas » :

$$f(q_1,q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta},\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Cette fonction est homogène de degré $\alpha + \beta$; ses rendements d'échelle sont donc décroissants, constants ou croissants selon que $\alpha + \beta$ est inférieur, égal ou supérieur à 1.

Ses productivités marginales sont :

$$f'_{q_1}(q_1,q_2) = \alpha q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta} \text{ et } f'_{q_2}(q_1,q_2) = \beta q_1^{\alpha} q_2^{\beta-1}$$

Elles sont décroissantes si et seulement si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$.

Comme son taux marginal de substitution, $f'_{q_1}(q_1,q_2)/f'_{q_2}(q_1,q_2)$, est égal à $\alpha q_2/\beta q_1$, il décroît de $+\infty$ à 0 lorsque q_1 croît de 0^+ à $+\infty$; les isoquantes sont donc convexes et asymptotes aux axes (elles sont « de type hyperbolique »).

Pour calculer l'élasticité de substitution de cette fonction de production (qui est homogène), on se sert de la formule (4.2), en posant $q_1/q_2 = k$. On a alors $tms(k) = \alpha/k\beta$, et donc $tms'(k) = -\alpha/k^2\beta$. D'où, en remplaçant dans (4.2) :

$$\sigma(k) = \frac{\alpha / k\beta}{k \times (-\alpha / k^2 \beta)} = -1.$$

L'élasticité de substitution est donc constante (elle est la même, quel que soit le panier d'inputs considéré).

Selon le signe de $\alpha + \beta - 1$, le graphe de la fonction $f(\cdot)$ a l'une des formes suivantes :

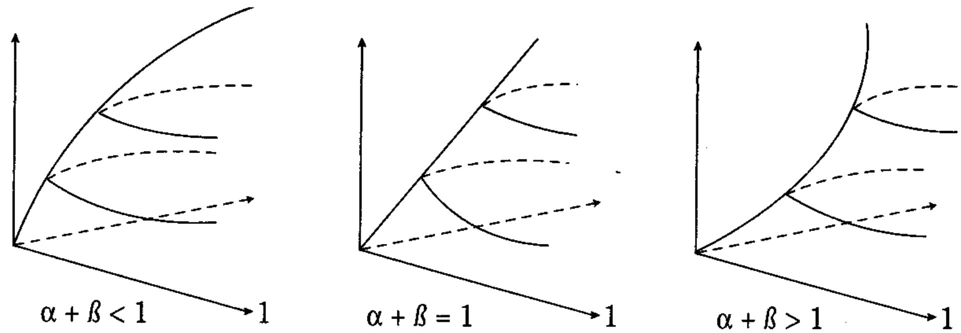

Figure 4.3

2. Soit la fonction CES (pour *constant elasticity of substitution*) $f(\cdot)$ définie par la formule :

$$f(q_1,q_2) = (\alpha q_1^{\rho} + \beta q_2^{\rho})^{1/\rho} \quad \text{avec } \alpha > 0,\ \beta > 0 \text{ et } 0 < \rho \leqslant 1.$$

On vérifie immédiatement que c'est une fonction homogène de degré 1 (donc, à rendements d'échelle constants).

Lorsque $\rho = 1$, elle est linéaire : ses isoquantes sont des segments de droite de pente $-\alpha/\beta$. Le taux marginal de substitution est le même, quel que soit le panier d'inputs considéré : ses inputs sont des *substituts parfaits*.

Lorsque ρ tend vers 0, la fonction CES tend vers la fonction de Cobb-Douglas, étudiée plus haut.

Ses productivités marginales sont :

$$f'_{q_1}(q_1,q_2) = (\alpha q_1^{\rho} + \beta q_2^{\rho})^{(1/\rho)-1} (\alpha q_1^{\rho-1})$$

et :

$$f'_{q_2}(q_1,q_2) = (\alpha q_1^{\rho} + \beta q_2^{\rho})^{(1/\rho)-1} (\beta q_2^{\rho-1}).$$

Elles sont donc décroissantes (dans le cas où $0 < \rho < 1$, ce qu'on suppose ici). Pour des paniers d'inputs aux éléments strictement positifs, le taux marginal de substitution entre les inputs 1 et 2 est donné par le rapport de ces productivités marginales. D'où :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \frac{\alpha q_1^{\rho-1}}{\beta q_2^{\rho-1}}.$$

Pour $0 < \rho < 1$, ce taux décroît de $+\infty$ à 0 lorsque q_1 augmente de 0^+ à $+\infty$: les isoquantes sont strictement convexes et asymptotes aux axes (elles sont de type hyperbolique).

5 Le problème de l'échange

Le consommateur qui dispose d'un certain nombre de ressources – sa dotation initiale (*cf.* fiche 2) – va chercher à augmenter sa satisfaction à travers l'échange avec les autres agents économiques. Le producteur aussi (l'échange portant ici sur l'output et les inputs). Une des hypothèses essentielles de la microéconomie est que les échanges se font sur la base du *volontariat* (les institutions garantissent qu'on ne peut forcer quelqu'un à faire des échanges, s'il ne le désire pas).

Cette hypothèse ne suffit cependant pas à déterminer le taux auquel les échanges vont s'effectuer. Elle implique, tout au plus, l'existence d'un seuil supérieur et d'un seuil inférieur entre lesquels se situent les taux acceptables par les parties en présence. Comme les taux acceptables sont, en général, très nombreux (une infinité, en fait), le modèle de l'échange conçu comme un face-à-face entre individus est indéterminé (il n'y a pas un taux unique qui s'impose à tous comme allant de soi).

L'étude du cas le plus simple possible, celui d'une économie où il n'y a que deux consommateurs et que deux biens, et où les échanges sont volontaires, permet de voir où se situe le problème, et d'introduire la notion de *courbe de contrat.*

I Le cas où il y a deux biens et deux agents

Soit deux consommateurs, A et B, dont les goûts sont caractérisés par les fonctions d'utilité $U_A(\cdot)$ et $U_B(\cdot)$, et qui ont pour dotations initiales $Q°_A = (x°_A, y°_A)$ et $Q°_B = (x°_B, y°_B)$.

Des échanges volontaires ne se feront que sur la base de taux acceptables par les deux parties, qui leur permettent d'augmenter leur utilité – à partir de son niveau initial, $U_A(Q°_A)$ pour A, $U_B(Q°_B)$ pour B. Or comme, par définition, le taux marginal de substitution (TMS) fixe un seuil (supérieur ou inférieur) au taux que peut accepter un individu (*cf.* fiche 2), il s'ensuit que les taux d'échange acceptables par A et par B sont compris entre le TMS de A en $Q°_A$ et le TMS de B en $Q°_B$.

Pour fixer les idées, supposons que :

$$Q°_A = (7,18),\ TMS^A_{y/x}(7,18) = 2$$

et :

$$Q°_B = (13,4),\ TMS^B_{y/x}(13,4) = 1/3.$$

A détient donc un panier relativement bien fourni en y ; d'où un TMS de y en x relativement élevé : A est prêt à céder jusqu'à deux unités du bien y contre une unité du bien x ; il accepte donc tout taux d'échange entre y et x inférieur à 2. De son côté, B détient un panier relativement fourni en x ; d'où un TMS de y en x relativement faible : B est prêt à accepter au moins 1/3 d'unité du bien y contre une unité du bien x ; il accepte donc les taux d'échange de y en x supérieurs à 1/3.

Ainsi, A et B acceptent tout taux d'échange de y en x compris entre 1/3 et 2. De façon plus générale, on a, si $TMS^B{}_{y/x}(Q°_B) < TMS^A{}_{y/x}(Q°_A)$:

$$TMS^B{}_{y/x}(Q°_B) \leqslant \text{taux d'échange de } y \text{ en } x \text{ acceptable par } A \text{ et } B \leqslant TMS^A{}_{y/x}(Q°_A).$$

On dit que les taux marginaux de substitution donnent les *taux de réserve* respectifs de A et de B ; les taux de réserve constituent donc des seuils pour les taux d'échange acceptables par les deux parties en présence.

Le *diagramme d'Edgeworth* fournit un moyen simple pour décrire la situation ; il est d'ailleurs souvent utilisé par le microéconomiste pour illustrer les problèmes liés à l'échange.

II Le diagramme d'Edgeworth

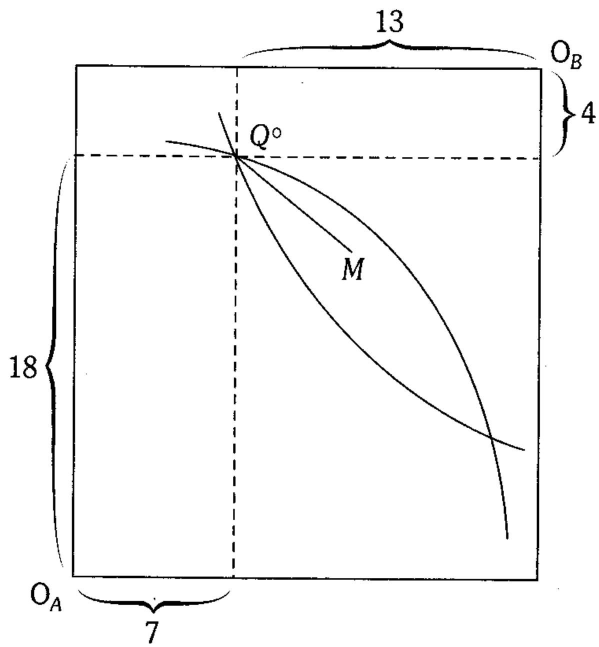

Figure 5.1

Le principe du diagramme est simple : on considère un rectangle dont un des côtés a une longueur égale à la quantité totale disponible du bien x (7 + 13 = 20 dans notre exemple), la longueur de l'autre étant égale à la quantité totale du bien y (18 + 4 = 22). Les deux côtés issus de O_A forment un système d'axes sur lequel sont données les quantités de biens détenues par A, les deux côtés restants, issus du sommet O_B, formant un autre système

(« renversé »), sur lequel sont données les quantités de biens détenues par B. Dans la « boîte » constituée par ces deux systèmes d'axes, les dotations initiales $Q°_A = (q°_{A1}, q°_{A2})$ et $Q°_B = (q°_{B1}, q°_{B2})$ sont représentées par le même point (noté $Q°$ sur le graphique). Si on trace les courbes d'indifférence passant par ce point, et si les TMS de A et de B y sont différents, alors des échanges mutuellement avantageux sont possibles. N'importe quel point qui se trouve entre les deux courbes d'indifférence – de A et de B – qui passent par $Q°$ (région grisée du diagramme) peut être le résultat de ces échanges, le point atteint dépendant des taux d'échange effectivement utilisés (ainsi, dans la figure 5.1, le passage du panier $Q°$ au panier M peut être fait au taux donné par la valeur absolue de la pente du segment de droite Q_M).

III La courbe des contrats

Parmi tous les paniers de biens, il y a ceux où le processus d'échange s'arrête, car les taux de réserve des deux individus y sont égaux. Si, dans le diagramme d'Edgeworth, on relie entre eux ces paniers de biens, on obtient généralement une courbe. On appelle celle-ci *courbe des contrats,* car des individus rationnels ne peuvent s'accorder (et donc « établir un contrat » entre eux) que sur un des points de cette courbe, après avoir épuisé toutes les possibilités d'échanges mutuellement avantageux (courbe XY de la figure 5.2).

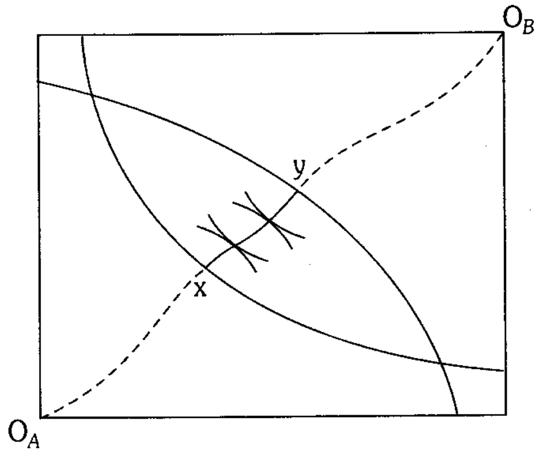

Figure 5.2

Retenir les seuls points de la courbe des contrats, et les taux d'échange correspondants, restreint le nombre de situations possibles. Toutefois, comme la courbe des contrats comporte une infinité de points, l'indétermination demeure : le microéconomiste ne peut désigner un taux d'échange, et une réaffectation des ressources, qui serait « le » résultat du modèle. Il peut seulement dire que si les indidus sont rationnels, un point de la courbe XY sera choisi, A cherchant à ce qu'il soit le plus proche possible de Y, et B, de X.

Pour lever l'indétermination, il faut donc rajouter d'autres ingrédients au modèle. C'est ce que fait, par exemple, le modèle de *concurrence parfaite,* qui suppose qu'il existe une entité extérieure qui affiche des prix – et donc des taux d'échange –, prix acceptés par tous comme base des échanges (*cf.* fiche 6).

APPLICATION

On suppose que la relation de préférence de A est représentée par la fonction d'utilité $U_A(\cdot)$ telle que :

$$U_A(q_1,q_2) = q_1 q_2,$$

celle de B étant telle que :

$$U_B(q_1,q_2) = 2\sqrt{q_1} + q_2.$$

Dans l'un et l'autre cas, les courbes d'indifférence associées sont convexes, comme dans les figures 5.1 et 5.2.

On détermine la courbe de contrat en égalisant les taux marginaux de substitution de A et de B. Pour A, ce taux – rapport des utilités marginales – est égal à q_2/q_1, tandis que pour B il est égal à $1/\sqrt{q_1}$.

La courbe de contrat a donc, en distinguant par des indices appropriés les quantités détenues par A de celles qui le sont par B, pour équation :

$$\frac{q_{2A}}{q_{1A}} = \frac{1}{\sqrt{q_{1B}}}. \tag{5.1}$$

Comme la quantité totale disponible de chaque bien est donnée, q_1 pour le bien 1 et q_2 pour le bien 2, alors on a les deux équations supplémentaires :

$$\begin{cases} q_{1A} + q_{1B} = q_1 \\ q_{2A} + q_{2B} = q_2 \end{cases}$$

Comme on est en présence d'un système de trois équations à quatre inconnues, celles-ci sont liées. Pour déterminer la courbe de contrat, on cherche le lien entre q_{1A} et q_{2A}. Ce qui est immédiat ici (du moins lorsque $q_{1A} < q_1$), puisqu'il suffit pour cela de faire $q_{1B} = q_1 - q_{1A}$ dans l'équation (5.1). Soit :

$$q_{2A} = \frac{q_{1A}}{\sqrt{q_1 - q_{1A}}}.$$

C'est l'équation de la courbe de contrat (pour l'ensemble des dotations initiales), courbe qui est représentée dans la figure 5.3 (où on a supposé que $q_1 = q_2 = 10$).

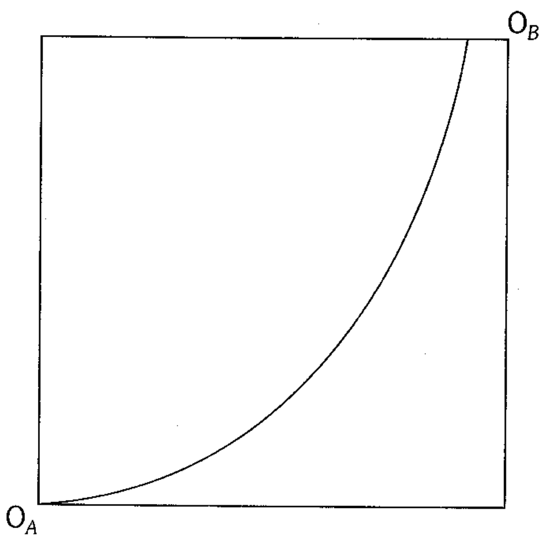

Figure 5.3

6 La concurrence parfaite

On a vu dans la fiche précédente qu'il ne suffit pas que les individus veuillent faire des échanges (mutuellement avantageux) pour que les taux auxquels ces échanges s'effectuent soient déterminés, c'est-à-dire uniques. Il y a multiplicité des taux acceptables, chacun ayant des taux qu'il préfère, car ils lui sont favorables (mais non aux autres).

La façon la plus courante, en microéconomie, de lever l'indétermination qui résulte de la multiplicité des taux d'échange acceptables consiste à supposer une forme d'organisation sociale particulière, la *concurrence parfaite,* dont une des caractéristiques importantes est *l'existence de prix affichés* (un prix par bien), prix qui sont connus et acceptés par tous (le taux d'échange entre deux biens étant alors donné par le rapport de leurs prix). Autrement dit, les agents économiques s'en remettent à une entité extérieure – car non impliquée dans les échanges – qui propose des taux uniques, sur la base desquels chacun prend sa décision. Celle-ci est d'ailleurs grandement facilitée par cette hypothèse, les agents n'ayant plus à marchander, dans les limites imposées par leurs taux de réserve (*cf.* fiche 5).

L'hypothèse d'unicité des prix n'est pas la seule qui caractérise la concurrence parfaite ; celle-ci porte aussi sur les institutions qui régissent les relations entre agents, sur l'information dont ils disposent et sur leurs comportements.

I Les hypothèses d'ordre institutionnel : un système très centralisé

A. Une entité qui fixe les prix et en informe les agents économiques

L'unicité des prix et le fait que tout le monde en soit informé supposent qu'il existe un « centre » qui affiche les prix et qui les fait connaître aux agents économiques. L'image habituellement retenue est celle d'un *commissaire-priseur,* tels ceux qui procèdent à des ventes aux enchères (Walras parlait de prix « criés », en pensant à la Bourse). Néanmoins, une représentation plus appropriée de la situation décrite par le modèle de concurrence parfaite est celle d'un réseau, du type minitel ou internet, auquel tous les agents sont branchés, avec un serveur central – un super ordinateur – qui affiche un prix par bien, prix sur la base duquel les ménages et les entreprises font leurs calculs (déterminent leur offres et leurs demandes). Le point essentiel, c'est que chacun accepte les règles du jeu, c'est-à-dire qu'il prend pour référence les prix affichés (sur son écran) par le super-ordinateur, sans chercher à proposer d'autres prix ou à nouer des relations bilaterales, « directes », avec d'autres agents. Tout doit passer par le « centre », qui assure que les conditions dans lesquelles à lieu la « compétition » soient les mêmes pour tout le monde.

B. Des offres et des demandes individuelles regroupées centralement

Sur la base des prix affichés, et seulement sur cette base, les ménages et les entreprises formulent des offres et des demandes, de biens, de travail, etc., qu'ils transmettent à l'entité centrale (en se servant, par exemple, de leur minitel ou de leur ordinateur personnel). Ces offres et ces demandes sont alors additionnées et confrontées globalement par l'entité centrale (le super-ordinateur, par exemple) qui peut donc voir si elles sont compatibles (c'est-à-dire, si elles peuvent être globalement satisfaites). Si elles le sont – ce qui n'est sûrement pas le cas si les prix affichés le sont au hasard –, alors on dit qu'il y a *équilibre* de concurrence parfaite.

La recherche de l'équilibre de concurrence parfaite nécessite donc que les offres et les demandes individuelles soient centralisées et regroupées. C'est cet aspect institutionnel du modèle qui justifie le fait qu'on puisse écrire l'égalité :

$$d_i(P) = \sum_j d_{ij}(P),$$

qui signifie que la demande globale du bien i aux prix P, $d_i(P)$, est obtenue en additionnant les demandes individuelles $d_{ij}(P)$ (l'indice j représentant ici les individus, ménages ou entreprises).

Si on note $s(\cdot)$ les fonctions d'offre, on a de même :

$$s_i(P) = \sum_j s_{ij}(P).$$

La recherche d'un prix d'équilibre passe alors par la confrontation des offres et des demandes globales, $s(\cdot)$ et $d(\cdot)$. Ce que peut faire l'entité centrale (le super-ordinateur).

C. Un système complet de marchés

Aux deux hypothèses précédentes, s'en rajoute une troisième, également d'ordre institutionnel ; elle postule l'existence d'un *système complet de marchés*. On entend par là qu'*il existe un prix affiché pour tous les biens qui interviennent dans les fonctions d'utilité des ménages et dans les fonctions de production des entreprises*. Comme, parmi ces biens, il y en a qui sont des biens futurs (en règle générale, les ménages et les entreprises répartissent dans le temps leur consommation et leur production), l'hypothèse sur l'existence d'un système complet de marchés implique que les individus ont la possibilité d'acheter ou de vendre des biens livrables à n'importe quelle date future (dans le cadre de l'horizon temporel défini par le modèle).

Cette hypothèse permet d'éliminer toute incertitude au moment de la prise de décision, ce qui simplifie énormément celle-ci (disparition des comportements spéculatifs, ou de précaution, comportements difficiles à modéliser). Comme les agents choisissent d'une fois pour toutes, et en connaissance de cause, leurs consommations et leurs productions présentes et futures, le temps devient inessentiel (il est une caractéristique des biens, parmi d'autres, sans plus). Le modèle de concurrence parfaite n'y fait donc pas référence – sauf lorsque le modélisateur s'intéresse à la dimension *intertemporelle* des choix individuels (*cf.* fiche 18).

Dans un monde sans incertitude, tel que le suppose l'hypothèse sur le système complet de marchés, la dotation initiale d'un ménage est formée de biens présents ou futurs, dont les quantités, $(q_1{}^\circ,..., q_n{}^\circ)$, sont connues dès l'instant initial (celui où le ménage prend sa décision, pour toute sa vie) ; aux prix $P = (p_1,...,p_n)$, la valeur $p_1q_1{}^\circ + ... + p_nq_n{}^\circ$ de sa dotation initiale représente sa *richesse* (alors que son revenu à une période donnée est égal à la valeur de sa dotation à cette période).

II Les hypothèses sur les comportements

Les individus sont supposés être rationnels, ce qui signifie qu'ils cherchent à maximiser leur fonction-objectif (utilité ou profit), compte tenu des contraintes qu'ils subissent (ressources limitées, techniques existantes) et de l'information dont ils disposent. Les ressources sont données par les dotations initiales, les techniques par les ensembles de production. Reste l'information, sur les taux d'échange ou sur ce que peuvent faire les autres. En concurrence parfaite cette information se réduit – par hypothèse – aux prix affichés. Plus précisément, le modèle suppose que les agents prennent leurs décisions sur la base de la seule information donnée par les prix, et qu'ils ne cherchent pas à en savoir plus (ce qui n'est pas vraiment rationnel...). Ils ne tiennent donc pas compte des effets que peuvent avoir ces décisions sur le comportement des autres, ou sur les prix. En outre, ils pensent – ou ils croient – que leurs offres et leurs demandes peuvent être satisfaites, aux prix affichés (ils font donc comme si ces prix étaient d'équilibre – en rendant compatibles les décisions prises séparément par chacun d'eux). On dit, à propos de cette croyance, que les agents ont des *conjectures concurrentielles.*

On résume parfois l'ensemble des hypothèses concernant le comportement des agents en concurrence parfaite en disant que ceux-ci agissent en « preneurs de prix » (*price takers*). À quoi s'ajoute une justification : un tel comportement est compréhensible (du point de vue de la rationalité) si, pour chaque bien, il y a un « très grand nombre », d'offreurs et de demandeurs, tous étant « très petits », au point d'être « négligeables », tels des « atomes noyés dans la masse ». Bien qu'évocatrices, ces formulations donnent une idée vague, et en bonne partie fausse, des comportements individuels, tels que les suppose le modèle de la concurrence parfaite. Ainsi, elles laissent dans l'ombre le rôle, essentiel, des croyances (conjectures) des agents au moment de la prise de décision ; un agent rationnel, même s'il est « très petit » (« un atome »), doit – ou devrait – se poser la question de la possibilité qu'il aura d'acheter – ou de vendre – effectivement les biens prévus dans son plan (qui est établi sur la base des prix affichés, et des ressources – et des techniques – disponibles). Il doit – ou devrait – s'interroger aussi sur la façon dont les autres peuvent réagir à la situation existante, puis prendre sa décision en conséquence.

Un tel comportement est toutefois très difficile à modéliser ; il dépend en outre des croyances de chacun sur ce que feront les autres, croyances imbriquées et fluctuantes, et donc pratiquement impossible à saisir. C'est pourquoi le modèle suppose des conjectures concurrentielles, malgré leur évidente « naïveté » (pour ne pas dire leur irrationalité) ; avec de telles conjectures, le choix des agents est radicalement simplifié. On retrouve la principale justification des hypothèses de la concurrence parfaite : simplifier au maximum le problème des prises de décision individuelles, ainsi que celui de leur coordination.

APPLICATION

On considère un consommateur qui a une dotation initiale $Q° = (q_1°,..., q_n°)$, où les indices 1,..., n peuvent désigner des biens présents ou des biens futurs. Aux prix affichés $P = (p_1,...,p_n)$, la richesse R du consommateur est égale à la valeur de sa dotation initiale, $p_1q_1°+...+ p_nq_n°$; les paniers de biens $(q_1,...,q_n)$ parmi lesquels le consommateur fait son choix doivent donc vérifier la *contrainte budgétaire :*

$$p_1q_1+ ... + p_nq_n \leqslant p_1q_1°+ ... + p_nq_n°.$$

En concurrence parfaite, les prix qui interviennent dans cette inégalité sont donnés ; en outre, le consommateur croit qu'ils sont indépendants des quantités de biens, seules variables sur lesquelles il pense pouvoir agir. Pour lui, la contrainte budgétaire (lorsque $n = 2$), est du type de celle qui a été tracée dans la figure 6.1 (où : $P = (1,2)$, $Q°= (4,2)$ et où, donc $R = 1 \times 4 + 2 \times 2 = 8$) : les axes donnent les quantités de biens (variables sur lesquelles porte le choix), la pente de la droite de budget AB étant donnée (au signe près) par le rapport des prix, qui est indépendant des quantités de biens. La droite de budget est obtenue en traçant la perpendiculaire au vecteur-prix P issue du point $Q°$ qui représente la dotation initiale (*cf.* fiche 1).

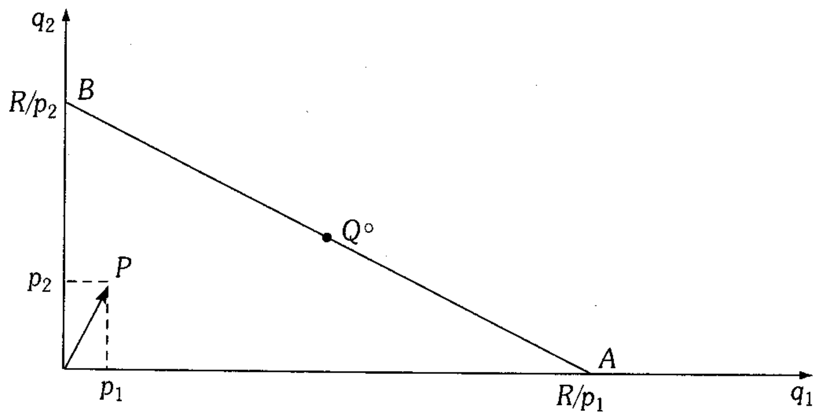

Figure 6.1

Le domaine des consommations possibles est donné par tous les points du triangle OAB. En réalité, du fait qu'on suppose que tous les échanges entre deux biens se font au même taux (donné par leur rapport de prix), le choix ne peut porter que sur un panier qui se trouve sur le segment de droite AB.

7 Le choix du consommateur en concurrence parfaite : le cas usuel

La concurrence parfaite suppose que chaque agent prend sa décision (fait son choix) sur la base de prix donnés, en pensant que ceux-ci ne sont pas influencés par sa décision (il agit en « preneur de prix » – *cf.* fiche 6).

Avec ces hypothèses le consommateur choisit le panier de biens $Q = (q_1,..., q_n)$ qui maximise son utilité $U(q_1,..., q_n)$ tout en vérifiant sa *contrainte budgétaire* :

$$p_1q_1 + ... + p_nq_n \leqslant R,$$

pour des prix $p_1, ..., p_n$ et un revenu R donnés.

Le contenu du panier choisi dépend, entre autres, de la forme de la relation de préférence du consommateur, et donc de celle de sa fonction d'utilité $U(\cdot)$. Dans cette fiche, on résout le cas le plus simple du point de vue du traitement mathématique (le « cas usuel »), celui où les courbes d'indifférence du consommateur sont « de type hyperbolique » (*cf.* fiche 2). On va supposer qu'il n'y a que deux biens, ce qui n'est pas très restrictif, le raisonnement étant le même avec n biens (on considère alors tous les couples possibles de biens).

I Le choix du consommateur dans le cas usuel

Ce choix – qui se traduit par une *demande* de biens de sa part – peut être déterminé de trois façons différentes : par une étude graphique, par le raisonnement, par le calcul.

A. Le choix du consommateur par l'étude graphique

Cette étude est faite dans la figure 7.1, où il apparaît que le panier choisi $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$ est sur la courbe d'indifférence « la plus haute » tout en ayant au moins un point commun avec la droite de budget. Comme les courbes d'indifférence sont convexes, le panier demandé Q^* est unique ; comme elles sont asymptotes aux axes, ce panier se trouve « à l'intérieur » du segment AB (et non dans les « coins » A ou B).

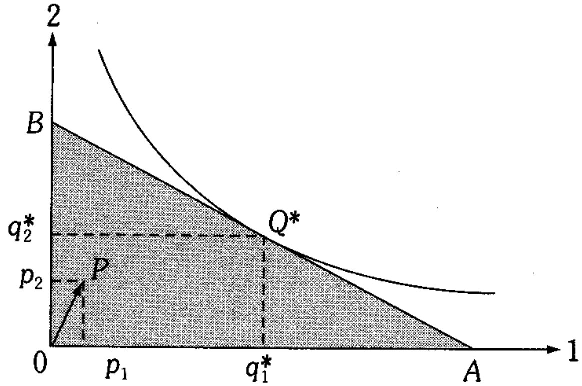

Figure 7.1

Ce qui caractérise le panier Q^*, outre le fait qu'il se trouve sur la droite de budget AB, c'est que la courbe d'indifférence et la droite de budget y sont tangentes. Or la pente de la tangente en un point à une courbe d'indifférence est, par définition et au signe près, le *taux marginal de substitution (TMS) des deux biens* au point considéré (*cf.* fiche 2), tandis que la pente de la droite de budget est donnée par le rapport des prix des deux biens. Par conséquent, ce qu'indique la figure 7.1, c'est que le consommateur choisit, parmi les paniers de biens qui vérifient sa contrainte budgétaire, celui qui égalise le TMS entre les deux biens au rapport de leurs prix.

B. Le choix du consommateur par le raisonnement économique direct

On part de la constatation suivante : le consommateur a intérêt à faire des échanges – et donc d'augmenter sa satisfaction – tant que son taux d'échange « subjectif » (donné par son TMS) est différent du taux d'échange « objectif », indépendant de lui, donné par le rapport des prix. Par conséquent, le panier demandé $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$, celui qui maximise sa satisfaction, doit être tel qu'il épuise les possibilités d'échanges avantageux pour lui ; autrement dit, il doit être tel qu'il égalise son taux marginal de substitution au rapport des prix. Condition qui s'écrit, plus précisément :

$$\mathrm{TMS}_{2/1}(q_1^*, q_2^*) = \frac{p_1}{p_2}.$$

À cette condition s'ajoute la contrainte budgétaire :

$$p_1 q_1^* + p_2 q_2^* = R.$$

La solution – unique, dans le cas usuel – du système formé par ces deux équations, dont les inconnues sont q_1^* et q_2^*, donne le choix du consommateur (ses demandes des biens 1 et 2).

C. Le choix du consommateur par le calcul

On peut procéder de deux façons.

• **La méthode directe :** on constate qu'on peut mettre la contrainte budgétaire sous la forme : $q_2 = (R - p_1q_1)/p_2$, ce qui permet de l'incorporer dans la fonction d'utilité et donc de chercher le maximum de la fonction $f(\cdot)$ d'une seule variable (et sans contrainte), définie par :

$$f(q_1) = U(q_1, \frac{R - p_1q_1}{p_2}).$$

Si $(q_1{}^*, q_2{}^*)$ maximise l'utilité – sous la contrainte budgétaire – alors il faut que :

$$f'(q_1{}^*) = 0.$$

Mais comme on a, par dérivation en chaîne (*cf.* fiche 26) :

$$f'(q_1) = U'_{q_1}(q_1, \frac{R - p_1q_1}{p_2}) + U'_{q_2}(q_1, \frac{R - p_1q_1}{p_2})(- \frac{p_1}{p_2}),$$

la condition $f'(q_1{}^*) = 0$ s'écrit, sachant que $q_2{}^* = (R - p_1q_1{}^*)/p_2$:

$$U'_{q_1}(q_1{}^*,q_2{}^*) + U'_{q_2}(q_1{}^*,q_2{}^*)(- \frac{p_1}{p_2}) = 0.$$

D'où, si $U'_{q_2}(q_1{}^*,q_2{}^*) \neq 0$:

$$\frac{U'_{q_1}(q_1{}^*,q_2{}^*)}{U'_{q_2}(q_1{}^*,q_2{}^*)} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Or, comme $U'_{q_1}(q_1{}^*,q_2{}^*) / U'_{q_2}(q_1{}^*,q_2{}^*) = \text{TMS}_{2/1}(q_1{}^*,q_2{}^*)$ (*cf.* fiche 3), on retrouve la condition d'égalité entre le taux marginal de substitution et le rapport des prix qui caractérise le choix du consommateur dans le cas usuel.

• **Le recours au lagrangien (*cf.* fiche 26) :** le lagrangien $L(\cdot)$ du programme du consommateur est ici défini par l'égalité :

$$L(q_1,q_2) = U(q_1,q_2) + \lambda(R - p_1q_1 - p_2q_2),$$

où λ est le *multiplicateur de Lagrange* associé à la contrainte budgétaire.

Le choix du consommateur $(q_1{}^*, q_2{}^*)$ doit vérifier la condition du premier ordre :

$$\begin{cases} L'_{q_1}(q_1{}^*,q_2{}^*) = 0 \\ L'_{q_2}(q_1{}^*,q_2{}^*) = 0 \end{cases}$$

D'où, vu la forme de $L(\cdot)$:

$$\begin{cases} U'_{q_1}(q_1{}^*,q_2{}^*) - \lambda p_1 = 0 \\ U'_{q_2}(q_1{}^*,q_2{}^*) - \lambda p_2 = 0 \end{cases}$$

En éliminant λ, on retrouve la condition :

$$\frac{U'_{q_1}(q_1{}^*,q_2{}^*)}{U'_{q_2}(q_1{}^*,q_2{}^*)} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Remarque

Le graphe de l'ensemble des paniers de biens qui vérifient la condition d'optimalité, quel que soit le revenu, est appelé *courbe d'Engel*, ou *sentier d'expansion*.

APPLICATIONS

1. On considère la relation de préférence représentée par la fonction d'utilité $U(\cdot)$ – « de Cobb-Douglas » – définie par :

$$U(q_1,q_2) = q_1^{\alpha}\, q_2^{\beta} \qquad \text{avec } \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Les courbes d'indifférence, pour cette fonction d'utilité, étant de type hyperbolique (*cf.* fiche 3), on est dans le cas usuel. Comme : $U'_{q_1}(q_1,q_2) = \alpha q_1^{\alpha-1}\, q_2^{\beta}$ et $U'_{q_2}(q_1,q_2) = \beta q_1^{\alpha}\, q_2^{\beta-1}$, et comme le taux marginal de substitution est donné par le rapport de ces expressions, il s'ensuit que :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \frac{\alpha q_2}{\beta q_1}.$$

La condition d'optimalité s'écrit donc, dans le cas présent :

$$\frac{\alpha q_2}{\beta q_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

À cette condition s'ajoute la contrainte budgétaire :

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = R.$$

On est en présence d'un système de deux équations à deux inconnues (q_1 et q_2), dont on note la solution $q_1{}^*$ et $q_2{}^*$. De la première, on tire :

$$q_2{}^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\, q_1{}^*.$$

Le *sentier d'expansion* est donc une droite issue de l'origine et de pente $\beta p_1/\alpha p_2$. En remplaçant dans la contrainte budgétaire, il vient :

$$p_1 q_1{}^*(1 + \frac{\beta}{\alpha}) = R,$$

et donc :

$$q_1{}^* = \frac{\alpha R}{p_1(\alpha + \beta)} \text{ et } q_2{}^* = \frac{\beta R}{p_2(\alpha + \beta)}.$$

C'est le choix du consommateur, *sa demande* des biens 1 et 2. On notera que la demande de chacun des biens ne dépend que de son seul prix : c'est là une particularité des fonctions d'utilité de Cobb-Douglas.

2. On considère la relation de préférence représentée par la fonction d'utilité $U(\cdot)$ (dite *additivement séparable*) définie par l'égalité:

$$U(q_1,q_2) = a \times q_1^{\alpha} + b \times q_2^{\beta},$$

où α et β sont tous deux strictement compris entre 0 et 1, a et b étant strictement positifs.

On n'est pas tout à fait dans le cas usuel, puisque les courbes d'indifférence (strictement convexes) ne sont pas asymptotes aux axes (*cf.* fiche 3, application 2). Néanmoins, comme le taux marginal de substitution décroît de $+\infty$ à 0 le long de ces courbes (*cf.* fiche 3), la condition d'égalisation du TMS au rapport de prix s'applique sans restriction,comme dans le cas usuel. Le choix du consommateur (q_1^*, q_2^*) vérifie donc les deux équations :

et :
$$\text{TMS}_{2/1}(q_1^*,q_2^*) = \frac{p_1}{p_2}.$$
$$p_1q_1^* + p_2q_2^* = R.$$

La figure 7.2 donne un exemple de ce choix.

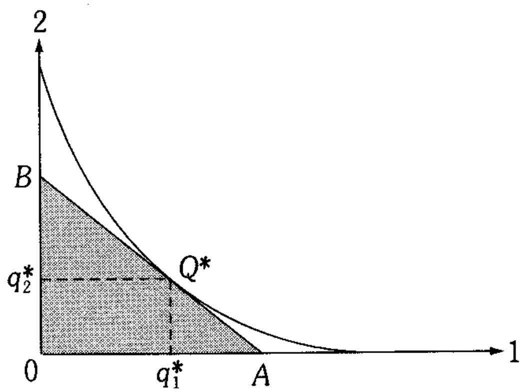

Figure 7.2

Les notations étant relativement lourdes dans le cas général, on va faire les calculs dans le cas où : $U(q_1,q_2) = 2\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}$. Le choix du consommateur (q_1^*, q_2^*) est donc tel que :

$$\frac{2\sqrt{q_2}^*}{\sqrt{q_1}^*} = \frac{p_1}{p_2}.$$

D'où :

$$q_2^* = (\frac{p_1}{2p_2})^2 q_1^*$$

(le sentier d'expansion est donc une droite passant par l'origine et de pente $(p_1/2p_2)^2$). Si on remplace dans la contrainte budgétaire $p_1q_1 + p_2q_2 = R$, on obtient la demande du bien 1 :

$$q_1^* = 4p_2R/p_1(p_1 + 4p_2),$$

puis celle du bien 2 :

$$q_2^* = p_1R/p_2(p_1 + 4p_2).$$

II Une condition du second ordre

La condition : taux marginal de substitution = rapport des prix, est une condition du *premier ordre* (elle porte sur des dérivées *premières*). Dans le cas usuel, elle est suffisante – d'où l'importance donnée à ce cas –, comme le montre l'étude graphique. Si on veut compléter celle-ci par le calcul, alors on construit la *matrice hessienne* bordée du programme du consommateur :

$$\mathbf{H}''(\cdot) = \begin{pmatrix} U''_{q_1^2}(\cdot) & U''_{q_1q_2}(\cdot) & -p_1 \\ U''_{q_2q_1}(\cdot) & U''_{q_2^2}(\cdot) & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour que Q^* soit un maximum (local) de l'utilité sous contrainte, il suffit que le déterminant de $\mathbf{H}''(Q^*)$ soit strictement positif. Soit, si on suppose que $U''(\cdot)$ est de classe C^2 (ce qui implique que $U''_{q_1q_2}(Q^*) = U''_{q_2q_1}(Q^*)$) si :

$$p_1p_2(-U''_{q_1^2}(Q^*) + 2U''_{q_1q_2}(Q^*) - U''_{q_2^2}(Q^*)) > 0.$$

Dans le cas où les utilités marginales sont strictement décroissantes (donc où $U''_{q_i^2}(\cdot) < 0$, $i = 1,2$), il suffit que l'on ait $U''_{q_1q_2}(\cdot) > 0$ pour que cette condition soit vérifiée, et donc pour que Q^* soit une solution du programme du consommateur.

8 Le choix du consommateur : solutions en coin et conditions de Kuhn et Tucker

Dans la fiche précédente, le choix du consommateur a été déterminé dans le cas usuel (courbes d'indifférence de type hyperbolique), où il suffit d'appliquer la règle d'égalité entre taux marginaux de substitution et rapports de prix. En dehors de ce cas, l'utilisation de cette règle peut être inadéquate (elle ne caractérise pas le panier optimal). Il peut ainsi arriver que, si les courbes d'indifférence ne sont pas asymptotes aux axes, la demande du consommateur de un (ou de plusieurs) bien(s) soit nulle ; si tel est le cas, on dit qu'on est en présence d'une « solution en coin » (elle se trouve en un point où une courbe d'indifférence coupe un des axes).

L'étude des cas non usuels doit notamment prendre en compte le fait que le choix du consommateur porte sur des paniers de biens dont les éléments ne peuvent être négatifs. Cette étude peut être faite graphiquement (s'il n'y a que deux biens) ou par le calcul, grâce à la méthode de Kuhn et Tucker, qui généralise celle du lagrangien.

Le traitement du cas général étant particulièrement lourd, on va se limiter à l'étude de quelques exemples classiques, qui suffisent pour faire comprendre la démarche à suivre.

I Le cas des fonctions d'utilité linéaires

On considère un ménage dont la relation de préférence peut être représentée par la fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par :

$$U(q_1,q_2) = \alpha q_1 + \beta q_2, \text{ avec } \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Ses courbes d'indifférence sont des droites dont la pente, $-\alpha/\beta$, donne, au signe près, le taux marginal de substitution :

$$\text{TMS}_{2/1}\,(q_1,q_2) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Le taux marginal de substitution est donc constant (il est le même pour tous les paniers de biens). On remarquera que les cœfficients α et β sont des « indicateurs de satisfaction » relatifs aux biens 1 et 2 : si $\alpha > \beta$, une unité du bien 1 procure au consommateur une satisfaction plus grande qu'une unité du bien 2 (quel que soit le panier de biens envisagé), le contraire arrivant si $\alpha < \beta$.

Aux prix affichés p_1 et p_2, la règle d'égalisation du taux marginal de substitution au rapport de prix s'écrit :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Or comme α, β, p_1 et p_2 sont des nombres *donnés* (des paramètres du modèle), il n'y a *aucune raison* pour que cette égalité soit vérifiée. Pourtant, quelles que soient les valeurs (strictement positives) prises par ces paramètres, il existe une solution au programme du consommateur (puisque son choix est limité par sa contrainte budgétaire, et par le fait qu'il ne peut y avoir des quantités négatives de biens). Comme la règle d'égalité entre le TMS et le rapport de prix conduit à une impossibilité (sauf dans le cas très particulier où $\alpha/\beta = p_1/p_2$), alors que les courbes d'indifférence sont convexes, la solution ne peut qu'être « en coin » – demande nulle d'un des biens –, sauf si $\alpha/\beta = p_1/p_2$. Trois cas sont à envisager, selon les valeurs prises par les paramètres α, β, p_1 et p_2 :

• $\alpha/\beta > p_1/p_2$: dans ce cas, le consommateur maximise sa satisfaction *en ne demandant que du bien* 1, dont le « rapport satisfaction-prix », α/p_1, l'emporte sur celui, β/p_2, du bien 2. Le consommateur choisit donc le panier : $(R/p_1,0)$ (point A de la figure (8.1*a*)) ;

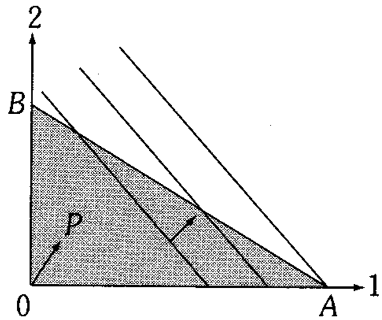

Figure 8.1*a*

Le *sentier d'expansion* — courbe décrite par les paniers de biens optimaux lorsque le revenu varie – est ici confondu avec l'axe des abscisses (quel que soit le revenu, la demande du bien 2 est nulle).

• $\alpha/\beta < p_1/p_2$: dans ce cas, le consommateur maximise sa satisfaction *en n'achetant que du bien* 2, dont le rapport « satisfaction-prix » l'emporte sur celui du bien 1. Le consommateur choisit donc le panier : $(0,R/p_2)$ (point B de la figure (8.1*b*)).

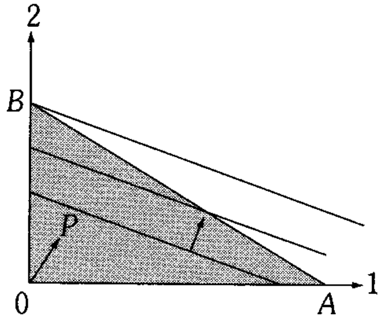

Figure 8.1*b*

Le *sentier d'expansion* est ici confondu avec l'axe des ordonnées (quel que soit le revenu, la demande du bien 1 est nulle).

• $\alpha/\beta = p_1/p_2$: comme le rapport « satisfaction-prix » est le même pour les deux biens, n'importe quel panier vérifiant la contrainte budgétaire du consommateur maximise sa satisfaction. Le programme du consommateur a une *infinité de solutions*, de la forme $(\theta R/p_1, (1-\theta)R/p_2)$, avec $\theta \in [0,1]$ (points du segment AB dans la figure (8.1*c*)).

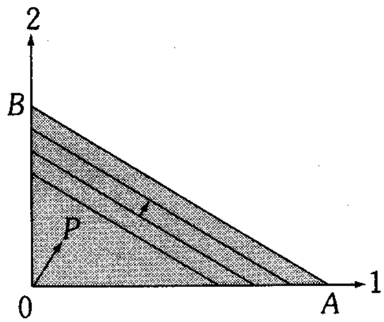

Figure 8.1c

Le *sentier d'expansion* est en fait ici une surface : c'est l'ensemble des paniers de biens dont les éléments sont non négatifs (autrement dit, c'est le premier « cadran », ou « orthant », du plan cartésien).

III Cas d'une fonction d'utilité quasi linéaire

Soit un consommateur dont les goûts sont représentés par la fonction d'utilité dite *quasi linéaire* :

$$U(q_1,q_2) = 2\sqrt{q_1} + q_2 .$$

Le taux marginal de substitution entre les biens 2 et 1 est, en un panier (q_1,q_2) quelconque (mais tel que $q_1 \neq 0$) :

$$\text{TMS}_{2/1}\,(q_1,q_2) = \frac{1}{\sqrt{q_1}}.$$

Quand q_1 augmente, de 0^+ à $+\infty$, ce taux décroît, de $+\infty$ vers 0 ; les courbes d'indifférence associées à $U(\cdot)$ sont donc strictement convexes. Toutefois, et c'est là une de leurs spécifités, elles coupent l'axe qui donne les quantités du bien 1 en un point où le $\text{TMS}_{2/1}$ n'est pas nul. Ainsi, la courbe d'indifférence de niveau k (> 0), dont l'équation est :

$$2\sqrt{q_1} + q_2 = k,$$

coupe cet axe au point $(k^2/4, 0)$, où on a : $\text{TMS}_{2/1}(k^2/4,0) = 1/\sqrt{k^2/4} = 2/k$. Le long de la courbe d'indifférence de niveau k, le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 varie donc entre $+\infty$ et $2/k$. La figure 8.2 donne, à titre d'exemple, la courbe d'indifférence qui passe par le panier (1,1) (donc de niveau $k = 3$), le $TMS_{2/1}$ étant égal à 2/3 au point (9/4, 0) où elle coupe l'axe des abscisses.

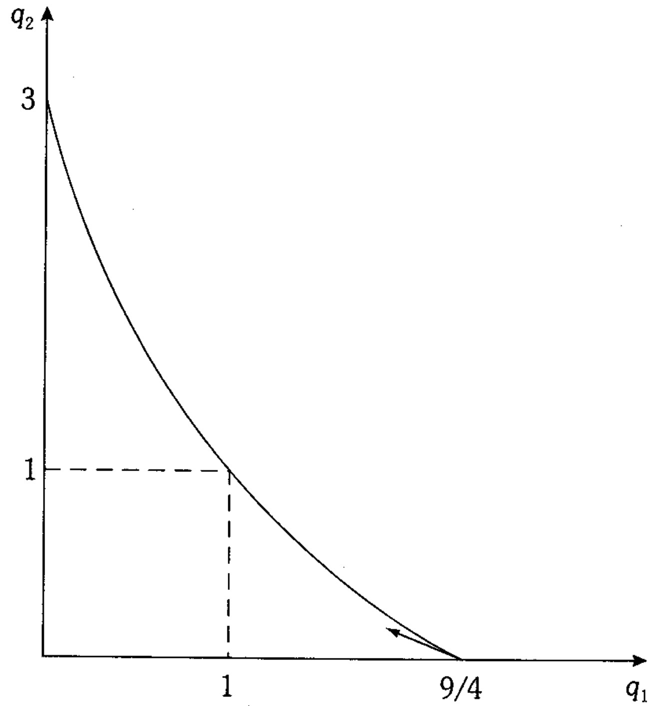

Figure 8.2

La condition d'égalité entre le taux marginal de substitution et le rapport de prix s'écrit, dans le cas présent :

$$\frac{1}{\sqrt{q_1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

D'où, la demande du bien 1 :

$$q_1^* = (\frac{p_2}{p_1})^2.$$

La demande du bien 2 se déduit alors de la contrainte budgétaire ; soit :

$$q_2^* = \frac{R - p_1 q_1^*}{p_2} = \frac{R}{p_2} - \frac{p_2}{p_1}.$$

Ces demandes des biens 1 et 2 n'ont toutefois un sens que si elles sont toutes deux non négatives. Pour cela, il faut que $q_2 \geqslant 0$, donc que :

$$R \geqslant \frac{p_2^2}{p_1}.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, donc si $R < p_2{}^2/p_1$, alors le choix du consommateur est la solution « en coin » $(R/p_1, 0)$. Les figures (8.3*a*) et (8.3*b*) décrivent les deux situations possibles avec cette fonction d'utilité (selon les valeurs des prix et du revenu).

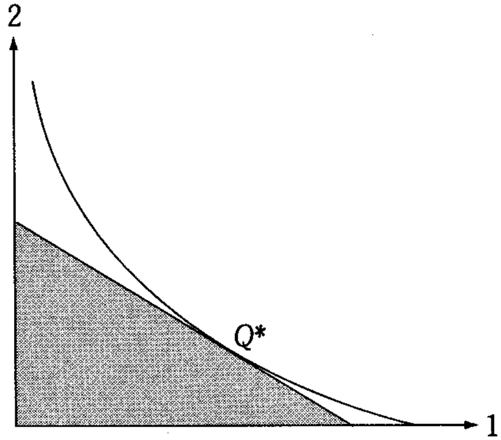

Figure 8.3*a*

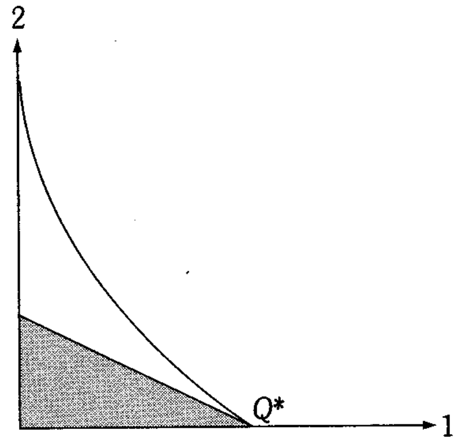

Figure 8.3*b*

Le *sentier d'expansion* est constitué de deux segments de droite : pour des revenus inférieurs à $p_2{}^2/p_1$, il est formé par les points de l'axe des abscisses compris entre 0 et $(p_2/p_1)^2$; pour des revenus supérieurs à $p_2{}^2/p_1$, il est formé par les paniers $((p_2/p_1)^2, R/p_2 - p_2/p_1)$, dont l'abscisse est constante, et qui sont donc représentés par la demi-droite parallèle à l'axe des ordonnées et d'abscisse $(p_2/p_1)^2$. La figure 8.4 donne un exemple d'un tel sentier d'expansion.

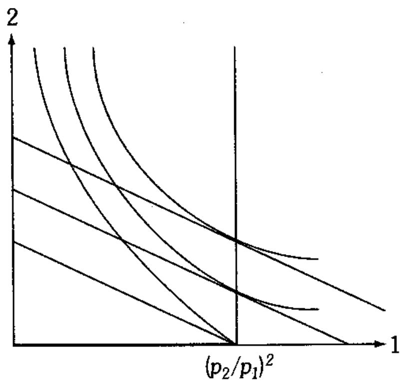

Figure 8.4

III Résolution par la méthode de Kuhn et Tucker

La méthode de Kuhn et Tucker généralise celle de Lagrange (*cf.* fiche 26) au cas où les contraintes sont des inégalités. Elle associe à chaque contrainte de la forme $g_j(Q) \geqslant 0$, où Q désigne le panier de biens $(q_1,\ldots,q_n)$, un multiplicateur de Lagrange λ_j, puis elle considère le lagrangien $L(\cdot)$ défini par :

$$L(Q) = U(Q) + \sum_{j=1}^{j=p} \lambda_j g_j(Q).$$

Si le panier Q^* maximise $U(\cdot)$ sous les contraintes $g_j(\cdot) \geqslant 0$, alors il doit annuler les dérivées de $L(\cdot)$ (condition nécessaire). Soit :

(i) $$L'_{q_i}(Q^*) = 0, \qquad i = 1,...,n.$$

Mais il doit, en outre, vérifier les *relations d'exclusion :*

(ii) $$\lambda_j g_j(Q^*) = 0, \qquad j = 1,...,p,$$

les multiplicateurs λ devant être positifs ou nuls :

(iii) $$\lambda_j \geqslant 0 \qquad j = 1,...,n.$$

Les conditions (i),(ii) et (iii) sont appelées *conditions de Kuhn et Tucker.*

Il découle des relations d'exclusion (ii) que si la j-ème contrainte n'est pas atteinte en Q^*, donc si $g_j(Q^*) > 0$, alors le multiplicateur qui lui est associé est nul (soit : $g_j(Q^*) > 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$) ; si, en revanche, ce multiplicateur est non nul (s'il est donc strictement positif), alors la contrainte est forcément atteinte en Q^* (soit : $\lambda_j > 0 \Rightarrow g_j(Q^*) = 0$).

APPLICATION

On va appliquer la méthode de Kuhn et Tucker au cas de la fonction quasi linéaire, traitée plus haut. Comme les contraintes sont : $R - p_1q_1 - p_2q_2 \geqslant 0$, $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant 0$, le lagrangien associé est :

$$L(q_1,q_2) = 2\sqrt{q_1} + q_2 + \lambda(R - p_1q_1 - p_2q_2) + \lambda_1q_1 + \lambda_2q_2.$$

Les conditions (i) (dérivées du lagrangien qui s'annulent) s'écrivent ici :

$$\begin{cases} 1/\sqrt{q_1} - \lambda p_1 + \lambda_1 = 0 \\ 1 - \lambda p_2 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

À quoi s'ajoutent les trois relations d'exclusion :

$$\begin{cases} \lambda(R - p_1q_1 - p_2q_2) = 0 \\ \lambda_1q_1 = 0 \\ \lambda_2q_2 = 0. \end{cases}$$

On est donc en présence d'un système de cinq équations à cinq inconnues (q_1, q_2, λ, λ_1, λ_2), auxquelles se rajoutent les conditions de signe :

$$\lambda \geqslant 0,\ \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0.$$

Si on suppose, par exemple, $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$, il découle des relations d'exclusion que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, puis, de la deuxième équation que λ est différent de 0 ; par conséquent, la contrainte budgétaire est atteinte (on a $R - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$). Des trois équations $1/\sqrt{q_1} - \lambda p_1 = 0$, $1 - \lambda p_2 = 0$ et $R - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$, on tire les demandes des biens 1 et 2 :

$$q_1^* = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2,\ q_2^* = \frac{R}{p_2} - \frac{p_2}{p_1}.$$

C'est là une solution possible, *à condition que* $R/p_2 - p_2/p_1 \geqslant 0$ (rappelons qu'on a *supposé* que $q_2 > 0$), et donc que $R \geqslant p_2^2/p_1$.

Mais le système peut comporter d'autres solutions. Ainsi, si on suppose que $q_1 > 0$ et que $q_2 = 0$, alors il s'ensuit (pour les mêmes raisons que ci-dessus) que $\lambda_1 = 0$, $\lambda > 0$ et $R - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$. De cette dernière égalité on tire (puisqu'on a supposé $q_2 = 0$) : $q_1 = R/p_1$. Reste à voir si les deux premières équations et la condition de signe $\lambda_2 \geqslant 0$ sont vérifiées. Or, de la deuxième équation, on tire $\lambda = (1 + \lambda_2)/p_2$. En reportant dans la première, il vient $\lambda_2 = p_2/p_1\sqrt{q_1} - 1$. Comme $q_1 = R/p_1$, la condition $\lambda_2 \geqslant 0$ n'est donc vérifiée que si :

$$p_2 \geqslant p_1\sqrt{R / p_1},$$

et donc que si :

$$p_2^2/p_1 \geqslant R.$$

On retrouve la solution (unique) déja obtenue par l'étude graphique :

– si $R < \dfrac{p_2^2}{p_1}$, $\quad (q_1^*, q_2^*) = (\dfrac{R}{p_1}, 0)$;

$$\text{– si } R \geqslant \frac{p_2^2}{p_1}, \quad (q_1^*, q_2^*) = (\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2, \frac{R}{p_2} - \frac{p_2}{p_1}).$$

9 Les fonctions de demande et de demande compensée

Le choix du consommateur conduit à des demandes de biens qui dépendent, en concurrence parfaite, des seuls prix $(p_1,\ldots,p_n)$ et de son revenu (R). La demande d'un bien i quelconque peut donc être notée :

$$q_i(p_1,\ldots,p_n,R) \qquad\qquad i = 1,\ldots,n.$$

La fonction $q_i(\cdot)$ est appelée *fonction de demande* du bien i du consommateur.

Une façon de caractériser ce type de fonction consiste à étudier comment la demande varie lorsque les prix et le revenu le font, notamment en déterminant le signe de ses dérivées, ou la valeur de ses *élasticités*. Cette étude a déjà été partiellement faite dans les deux fiches précédentes, chaque fois que la question du *sentier d'expansion* a été abordée, puisque celui-ci donne la façon dont les demandes varient en fonction du revenu. Reste donc à étudier l'impact des prix sur la demande.

I La notion d'élasticité

L'élasticité est un nombre « pur » (sans unités), qui indique l'effet de la *variation relative* (donc, en pourcentage) d'une variable sur les variations relatives d'une autre variable, qui dépend d'elle. Ainsi, dans le cas de la fonction de demande $q_i(\cdot)$, l'élasticité-revenu est donnée par la formule :

$$e_{iR}(\cdot) = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta q_i(\cdot)/q_i(\cdot)}{\Delta R/R}$$

Comme $\dfrac{\Delta q_i(\cdot)/q_i(\cdot)}{\Delta R/R} = \dfrac{\Delta q_i(\cdot)/\Delta R}{qi(\cdot)/R}$, on a donc, si on suppose que la fonction $q_i(\cdot)$ est dérivable :

(9.1) $$e_{iR}(\cdot) = (q_i)'_R(\cdot)\,\frac{R}{q_i(\cdot)}.$$

Ou encore, du fait que $(q_i)'_R(\cdot)/q_i(\cdot)$ est la dérivée par rapport à R de $\ln q_i(\cdot)$:

(9.2) $$e_{iR}(\cdot) = R(\ln q_i(\cdot))'_R.$$

On définit de la même façon les élasticités-prix. Ainsi, on a :

$$e_{ip_j}(\cdot) = (q_i)'_{p_j}(\cdot)\,\frac{p_j}{q_i(\cdot)}.$$

APPLICATIONS

• Soit la fonction de demande $q(\cdot)$ telle que :

$$q(p) = cp^a.$$

Cette fonction d'une seule variable (le prix p) n'a qu'une seule élasticité, l'élasticité-prix :

$$e(p) = a$$

(le calcul de l'élasticité est ici le plus simple avec la formule (9.2), avec p au lieu de R, car on a : $\ln q(p) = c + a\ln p$, et donc $(\ln q(p))' = a/p$).

On est donc en présence d'une *élasticité constante* (indépendante de la valeur prise par la variable).

Cette propriété vaut pour toute fonction à plusieurs variables de type multiplicatif, où une des variables est affectée d'un exposant, telle la fonction de demande :

$$q(p_1,\dots,p_n,R) = p_1{}^k f(p_2,\dots,p_n,R),$$

dont l'élasticité par rapport au prix p_1 est constante, et égale à l'exposant k de p_1.

En particulier, les fonctions de demande $q(\cdot)$ de la forme :

$$q(p_1,\dots,p_n,R) = p_1^{a_1}\dots p_n^{a_p} R^b$$

sont à élasticités constantes, quelle que soit la variable envisagée.

• Soit la fonction de demande $q(\cdot)$, dont le logarithme est donné par la formule :

(9.3) $$\ln q(p_1,p_2,R) = a_1\ln p_1 + a_2p_2 + a_3\ln R.$$

Le plus simple pour le calcul des élasticités est, dans le cas présent, d'appliquer la formule (9.2). Pour p_1 et pour R, on est en présence d'élasticités constantes (comme dans l'exemple précédent) : a_1 pour le prix du bien 1, a_3 pour le revenu. Mais tel n'est pas le cas pour l'élasticité relative au prix du bien 2 ; la formule (9.2) peut toutefois être aussi utilisée. En effet, en dérivant par rapport a p_2 les deux membres de (9.3), il vient :

$$(\ln q(p_1,p_2,R))'_{p_2} = a_2.$$

D'où, en multipliant par p_2 les deux membres de cette égalité :

$$(\ln q(p_1,p_2,R))'_{p_2}p_2 = a_2p_2.$$

Comme le membre de gauche de cette égalité est la formule qui définit l'élasticité par rapport a p_2 (formule (9.2), où on remplace R par p_2), il s'ensuit que :

$$e_{p_2}(p_1,p_2,R) = a_2p_2.$$

L'élasticité par rapport au prix du bien 2 n'est donc pas constante (elle dépend de ce prix).

III Fonction d'utilité indirecte et « utilité marginale du revenu »

Les demandes du consommateur sont, par définition, telles qu'il maximise son utilité (sous contrainte budgétaire). Si on note $V(p_1,\dots,p_n,R)$ l'utilité maximum procurée par la consommation des biens demandés, aux prix $p_1,\dots, p_n$ et avec un revenu R, alors la fonction $V(\cdot)$ est definie par l'égalité :

$$V(p_1,\dots,p_n,R) = U(q_1(p_1,\dots,p_n,R),\dots, q_n(p_1,\dots,p_n,R)).$$

On appelle $V(\cdot)$ *fonction d'utilité indirecte.* Une des propriétés mathématiques intéressantes de cette fonction est que sa *dérivée par rapport au revenu est égale au multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de revenu du consommateur* (pour la démonstration, voir la fiche 26). Ce qu'on écrit :

$$V'_R(p_1,\dots,p_n,R) = \lambda.$$

Le multiplicateur de Lagrange λ est donc un indicateur de l'« intensité » avec laquelle s'exerce la contrainte budgétaire sur le consommateur (plus λ est grand, et plus grand est l'impact sur son utilité maximum d'une « petite » variation de son revenu). C'est pourquoi on appelle λ « utilité marginale du revenu ».

APPLICATION

Soit la fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par :

$$U(q_2,q_1) = q_1q_2.$$

C'est une fonction de Cobb-Douglas, avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ (*cf.* fiche 7). Aux prix p_1 et p_2, et pour le revenu R, la demande du bien 1 est $R/2p_1$, celle du bien 2 étant $R/2p_2$ (*cf.* fiche 7). On a donc, par définition de la fonction d'utilité indirecte $V(\cdot)$:

$$V(p_1,p_2,R) = U\left(\frac{R}{2p_1}, \frac{R}{2p_2}\right) = \frac{R}{2p_1} \times \frac{R}{2p_2}$$

$$= \frac{R^2}{4p_1p_2}.$$

L'utilité marginale du revenu, dérivée par rapport à R de cette expression, est donc :

$$V'_R\,(p_1,p_2,R) = \frac{R}{2p_1p_2}.$$

III La demande compensée

Les demandes envisagées jusqu'à présent, que l'on qualifie parfois de « marshalliennes », sont determinées pour des prix et un revenu donnés. Or le consommateur est, avant tout, concerné par l'utilité – ou la satisfaction – maximum qu'il peut obtenir, pour des prix donnés. D'ou l'idée qui consiste à définir un autre type de demandes, les *demandes compensées* ou *hicksiennes,* à utilité donnée.

En se limitant au cas de deux biens, on notera $q_i^c(p_1,p_2,u)$ la demande compensée du bien i ($i = 1,2$), aux prix p_1 et p_2, et pour une utilité donnée u (celle-ci remplace le revenu R de la demande « marshallienne »). Il découle de la définition des demandes compensées que l'on a, si on note $U(\cdot)$ la fonction d'utilité du consommateur :

$$U(q_1^c(p_1,p_2,u),\ q_2^c(p_1,p_2,u)) = u. \tag{9.4}$$

À l'équation (9.4), condition imposée sur le niveau d'utilité, s'ajoute *la condition d'optimalité*, donnée par l'égalité entre le taux marginal de substitution et le rapport de prix (en supposant qu'on est dans le cas usuel) :

$$\text{(9.5)} \qquad \mathrm{TMS}_{2/1}(q_1^c(p_1,p_2,u),\ q_2^c(p_1,p_2,u)) = \frac{p_1}{p_2}.$$

Si on regroupe (9.4) et (9.5), on est en présence d'un système de deux équations à deux inconnues, les demandes compensées, $q_1^c(p_1,p_2,u)$ et $q_2^c(p_1,p_2,u)$. Pour trouver celles-ci, il suffit donc de résoudre ce système.

Graphiquement, l'ensemble des demandes compensées pour une utilité u donnée est représenté par la courbe d'indifférence de niveau u. Pour un vecteur prix $P = (p_1,p_2)$ donné, on obtient les demandes compensées $q_1^c(p_1,p_2,u)$ et $q_2^c(p_1,p_2,u)$ en traçant la tangente à la courbe d'indifférence de niveau u qui est perpendiculaire au vecteur-prix P, comme cela est fait dans la figure 9.1 (où on a tracé aussi la demande compensée $Q^c(P',u)$, pour un autre vecteur-prix, P', mais pour le même niveau d'utilité u).

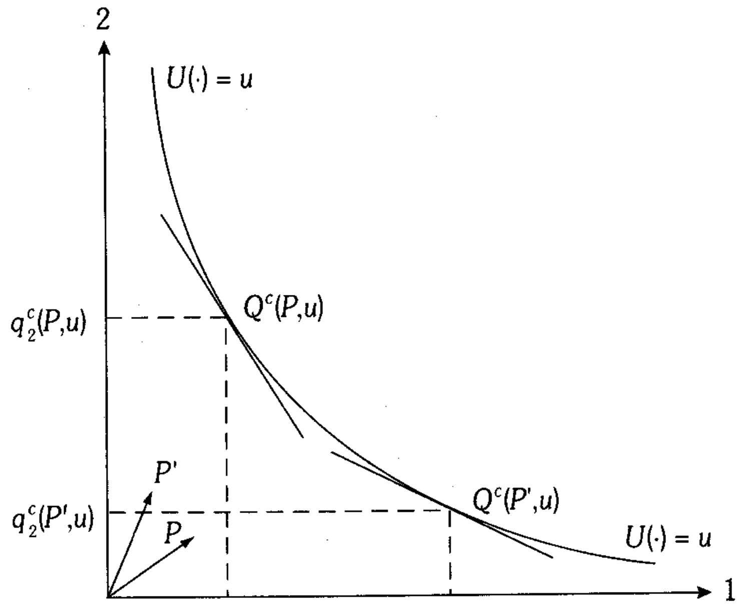

Figure 9.1

Remarquons que dans la figure 9.1, *on se donne* la courbe d'indifférence, et *on cherche* la droite qui lui est tangente (tout en étant perpendiculaire au vecteur-prix), alors que dans le cas du choix du consommateur traité dans les deux fiches précédentes (demande marshallienne), *on se donnait* la droite de budget, et *on cherchait* la courbe d'indifférence qui lui est tangente.

APPLICATIONS

1. Soit la fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par l'égalité :

$$U(q_1,q_2) = q_1 \times q_2.$$

Les demandes compensées pour une utilité u donnée doivent donc être telles que :

$$q_1 \times q_2 = u. \tag{9.6}$$

En outre, aux prix p_1 et p_2, elles doivent aussi vérifier la condition d'optimalité (9.5) (on est ici dans le cas usuel, les courbes d'indifférence étant de type hyperbolique). Comme on a, avec la fonction $U(\cdot)$ considérée, $U'_{q_1}(q_1,q_2) \,/\, U'_{q_2}(q_1,q_2) = q_2/q_1$, cette condition s'écrit :

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Les solutions en q_1 et en q_2 du système d'équations formé par (9.6) et (9.7) donnent les demandes compensées :

$$\begin{cases} q_1^c(p_1,p_2,u) = \sqrt{\dfrac{p_2}{p_1}u} \text{ pour le bien 1} \\[2ex] q_2^c(p_1,p_2,u) = \sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}u} \text{ pour le bien 2} \end{cases}$$

2. Si la fonction d'utilité est :

$$U(q_1,q_2) = \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2},$$

alors les demandes compensées pour l'utilité u et les prix p_1 et p_2 sont solution du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} = u \text{ (contrainte sur l'utilité)} \\[1ex] \left(\dfrac{U'_{q_1}(q_1,q_2)}{U'_{q_2}(q_1,q_2)} =\right)\dfrac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}} = \dfrac{p_1}{p_2} \qquad \text{(condition d'optimalité).} \end{cases}$$

Ces solutions sont :

$$\begin{cases} q_1^c(p_1,p_2,u) = \dfrac{p_2^2u^2}{(p_1+p_2)^2} \qquad \text{(demande compensée du bien 1)} \\[2ex] q_2^c(p_1,p_2,u) = \dfrac{p_1^2u^2}{(p_1+p_2)^2} \qquad \text{(demande compensée du bien 2)} \end{cases}$$

IV Le revenu compensé

Le revenu compensé, pour une utilité u et des prix p_1 et p_2 donnés, est, par définition, le revenu qui permet au consommateur d'atteindre tout au plus l'utilité u, lorsque les prix sont p_1 et p_2. On le note donc $R^c(p_1,p_2,u)$. Il découle de sa définition, et de celle des demandes compensées, qu'il est égal à la dépense nécessaire pour acheter le « panier compensé » $Q^c = (q_1^c(p_1,p_2,u), q_2^c(p_1,p_2,u))$. On a donc :

$$R^c(p_1,p_2,u) = p_1q_1^c(p_1,p_2,u) + p_2q_2^c(p_1,p_2,u).$$

C'est en raison de cette égalité qu'on appelle aussi le revenu compensé *fonction de dépense* du consommateur.

On peut donc envisager le programme de celui-ci de deux façons différentes, dont on dit qu'elles sont *duales* :

- soit il maximise l'utilité à dépense (revenu) donnée ;
- soit il minimise la dépense à utilité donnée.

On passe de l'un à l'autre en changeant « maximiser » par « minimiser » (et vice versa), et en permutant les rôles de l'utilité et de la dépense.

Il découle de la définition des fonctions $V(\cdot)$ et $R^c(\cdot)$ que l'on a :

$$V(p_1,\ldots,p_n,R^c(p_1,\ldots,p_n,u)) = u$$

et :

$$R^c(p_1,\ldots,p_n,V(p_1,\ldots,p_n,R)) = R,$$

quels que soient les prix p, l'utilité u et le revenu R.

On montre, à partir du théorème de l'enveloppe (*cf.* fiche 26), que *la dérivée du revenu compensé par rapport au prix de l'un quelconque des biens est égale à la demande compensée de ce bien.* C'est le *lemme de Shephard,* qui s'écrit donc :

$$(R^c)'_{p_i}(\cdot) = q_i^c(\cdot), \quad i = 1, \ldots, n.$$

APPLICATIONS

1. Dans le cas de la fonction d'utilité $U(\cdot)$ telle que $U(q_1,q_2) = q_1 \times q_2$, de l'application 1 ci-dessus, le revenu compensé est : $p_1\sqrt{\frac{p_2}{p_1}u} + p_2\sqrt{\frac{p_1}{p_2}u}$. Soit, après simplifications :

$$R^c(p_1,p_2,u) = 2\sqrt{p_1p_2u}.$$

2. Dans le cas de l'application 2 ci-dessus, où $U(q_1,q_2) = \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}$, le revenu compensé est : $p_1\frac{p_2^2u^2}{(p_1+p_2)^2} + p_2\frac{p_1^2u^2}{(p_1+p_2)^2}$. Soit, après simplifications :

$$R^c(p_1,p_2,u) = \frac{p_1p_2u^2}{p_1+p_2}.$$

10 Effet-substitution et effet-revenu

Les variations du prix d'un bien ont *deux* conséquences sur sa demande : d'une part, le *prix relatif* de ce bien est modifié, ce qui incite à lui en substituer d'autres (ou à le substituer à d'autres) ; d'autre part, le *pouvoir d'achat du revenu* varie. On parle, à propos de ces deux types de conséquences, d'*effet-substitution* et *d'effet-revenu*, et on cherche à les évaluer séparément, en faisant appel à la demande et au revenu compensés (*cf.* fiche 9).

I L'effet-substitution

On évalue cet effet en raisonnant *à niveau d'utilité inchangé,* le revenu pouvant, lui, varier. Pour cela, on se donne une utilité – ou une surface d'indifférence – de référence, qui est celle à laquelle parvient le consommateur lorsqu'il fait son choix (optimal), pour un vecteur-prix P et un revenu R donnés (le couple (P,R) caractérise donc la situation de référence). Pour simplifier la présentation, on supposera qu'il n'y a que deux biens, donc que $P = (p_1,p_2)$. Dans la situation de référence, les demandes du consommateur, $q_i(p_1,p_2,R)$, $i = 1,2$ (q_i^*, en abrégé) peuvent être représentées par un panier $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$, comme cela est fait dans la figure 10.1. La courbe d'utilité qui passe par Q^* est, par définition, la courbe d'utilité de référence ; si $U(\cdot)$ est une fonction d'utilité associée à la relation de préférence, alors l'utilité de référence est $U(Q^*)$ – notée u^* par la suite.

Supposons maintenant que le prix du bien 2 augmente, de p_2 à p_2' (donc $p_2' > p_2$) et appelons P' le nouveau vecteur-prix (donc $P' = (p_1,p_2')$). À utilité u^* inchangée, et pour une dépense la plus faible possible (aux nouveaux prix), le choix du consommateur est donné par ses demandes compensées $q_i^c(p_1,p_2',u^*)$, $i = 1,2$, notées tout simplement q_i^c quand il n'y a pas d'ambiguïté possible. Dans la figure 10.1, ces demandes sont représentées par le point Q^c.

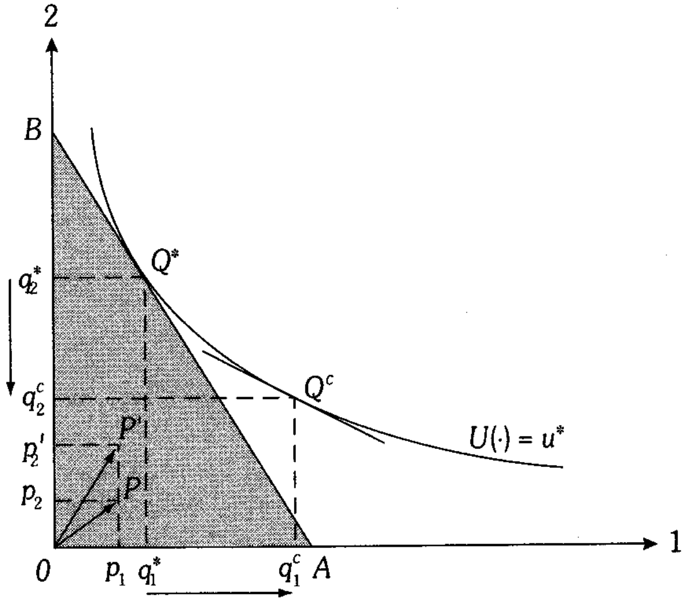

Figure 10.1

L'effet-substitution est, par définition, le déplacement sur la courbe d'indifférence de référence, suite à une variation de prix. Il dépend évidemment de celle-ci, et de la courbe d'indifférence retenue. On l'évalue à travers les écarts, $q_i^* - q_i^c$, $i = 1,2$, entre les demandes et les demandes compensées ; il est représenté dans la figure 10.1 par deux flèches le long des axes (une par bien), qui symbolisent le « déplacement » entre les points Q^* et Q^c. L'effet-substitution agit toujours dans le même sens : la hausse (baisse) du prix relatif d'un bien provoque une baisse (hausse) de sa demande compensée.

III L'effet-revenu

Aux prix (p_1,p_2) et au revenu R, le panier Q^c n'est généralement pas un choix possible du consommateur. Ainsi, dans le cas décrit dans la figure 10.2, il est en dehors du triangle OAB', délimité par les axes et la contrainte budgétaire. Soumis à cette contrainte, le consommateur se rabat sur le panier Q' (= $(q_i(p_1,p_2',R)$, $q_2(p_1,p_2',R))$, qui lui procure une utilité moindre que Q^c (ou que Q^*). Cette diminution d'utilité a pour origine la baisse du pouvoir d'achat du revenu R, suite à la hausse du prix du bien 2. Le passage du panier Q^c au panier Q' représente l'*effet-revenu* ; comme pour l'effet-substitution, on le représente graphiquement par des flèches sur chacun des axes (une par bien).

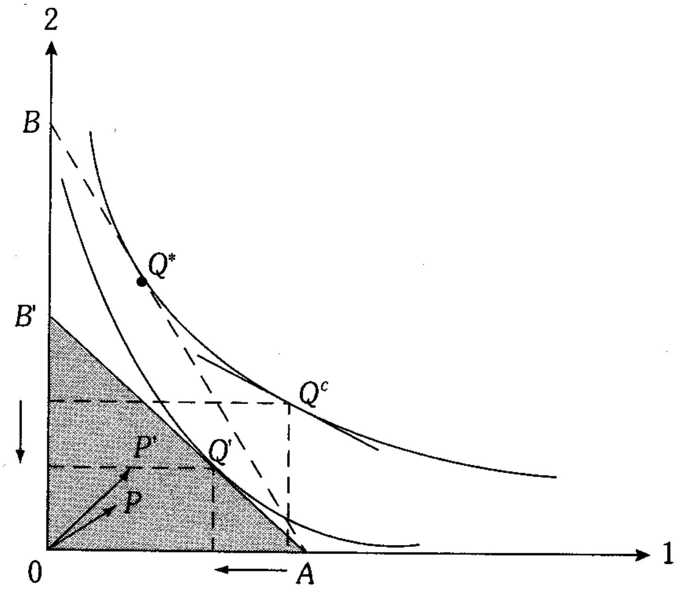

Figure 10.2

APPLICATIONS

On prend pour prix de référence le vecteur-prix $P = (1,1)$, et on suppose que le prix du bien 2 double (il passe donc de 1 à 2).

On va évaluer les effets substitution et revenu pour les deux types de fonction d'utilité considérés dans la fiche précédente.

1. On suppose que $U(q_1,q_2) = q_1q_2$ et que $R = 12$. Comme on est en présence d'une fonction de Cobb-Douglas, la fonction de demande du bien i, $i = 1,2$, est (*cf.* fiche 7) : $q_i(p_1,p_2,R) = R/2p_i$. On a donc, pour $R = 12$:

- aux prix $P = (1,1)$: $q_1(1,1,12) = 6$, $q_2(1,1,12) = 6$ (donc $Q^* = (6,6)$ et $u^* = 6 \times 6 = 36$) ;
- aux prix $P' = (1,2)$: $q_1(1,2,12)= 6$, $q_2(1,2,12)= 3$ (donc $Q' = (6,3)$).

Quant aux demandes compensées, $q_1^c(p_1,p_2,u) = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}u}$ et $q_2^c(p_1,p_2,u) = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}u}$

(*cf.* fiche 8), elles valent ici, pour $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ et $u = 36$ ($= u^*$) : $\sqrt{72} = 8{,}49$ pour le bien 1, $\sqrt{18} = 4{,}25$ pour le bien 2. On a donc : $Q^c = (8{,}49 ; 4{,}25)$.

Ainsi, le doublement du prix du bien 2 implique que le consommateur substitue 2,49 (= 8,49 – 6) unités du bien 1 à 1,75 (6 – 4,25) unités du bien 2.

Quant à l'effet-revenu, il se traduit par une diminution de 8,49 à 6 de la demande du bien 1 (il agit dans le sens contraire de l'effet-substitution, qu'il contrecarre exactement, ce qui est typique des fonctions d'utilité du type Cobb-Douglas), et par une diminution de 4,25 à 3 de la consommation du bien 2 (l'effet-revenu s'ajoute donc à l'effet-substitution).

2. On suppose que $U(q_1,q_2) = \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}$ et que $R = 8$. Les fonctions de demande sont alors (*cf.* fiche 7) : $q_1(p_1,p_2,R) = p_2R/p_1(p_1+p_2)$ pour le bien 1, $q_2(p_1,p_2,R) =$

$p_1R/p_2(p_1+p_2)$ pour le bien 2. Soit, en reprenant les mêmes prix que dans l'exemple précédent, mais avec $R = 8$:

– aux prix $P = (1,1)$: $q_1(1,1,8) = 4$, $q_2(1,1,8) = 4$ (donc $Q^* = (4,4)$ et $u^* = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$) ;

– aux prix $P' = (1,2)$: $q_1(1,2,8)= 5{,}33$, $q_2(1,2,8)= 1{,}33$ (donc $Q' = (5{,}33 ; 1{,}33)$).

Quant aux demandes compensées, elles ont été déterminées dans la fiche précédente :

$$q_1^c(p_1,p_2,u) = \frac{p_2^2u^2}{(p_1+p_2)^2} \text{ pour le bien 1, } q_2^c(p_1,p_2,u) = \frac{p_1^2u^2}{(p_1+p_2)^2} \text{ pour le bien 2.}$$

Pour le vecteur-prix (1,2) et l'utilité $u = 4$ (= u^*), les demandes compensées sont données par le vecteur : $Q^c = (7{,}11 ; 1{,}73)$.

L'effet-substitution se traduit donc par une hausse de 7,11 – 4 = 3,11 de la demande du bien 1, et par une baisse de 4 – 1,73 = 2,27 de la demande du bien 2.

L'effet-revenu se traduit par une diminution de 7,11 – 5,33 = 1,78 de la demande du bien 1 et de 1,73 – 1,33 = 0,40 de celle du bien 2.

III Biens normaux, biens inférieurs, biens Giffen

Lorsque le prix d'un bien augmente (diminue), sa demande compensée diminue (augmente) : l'effet-substitution agit toujours dans le même sens. Mais tel n'est pas forcément le cas avec l'effet-revenu, qui peut selon la fonction d'utilité et la situation de référence retenues, soit renforcer l'effet-substitution, soit l'amoindrir, soit même le contrecarrer au point qu'une hausse du prix d'un bien puisse provoquer une hausse de sa demande. Dans le premier cas, effets dans le même sens, on dit qu'on est en présence d'un *bien normal*, dans le second (effet substitution amoindri), d'un *bien inférieur*, dans le troisième, d'un *bien Giffen*. La figure 10.3 illustre ces deux derniers cas : dans 10.3*a*, le bien 1 est inférieur ; dans 10.3*b*, c'est un bien Giffen.

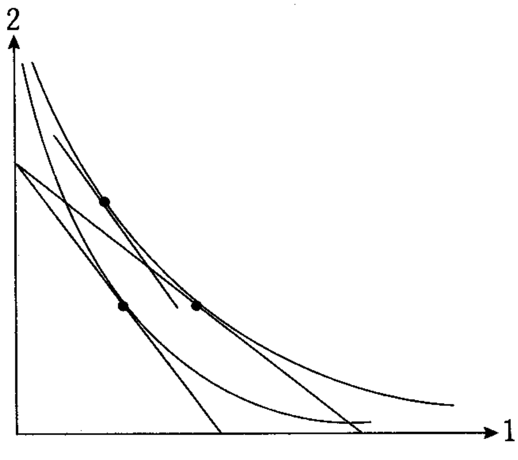

Figure 10.3*a*

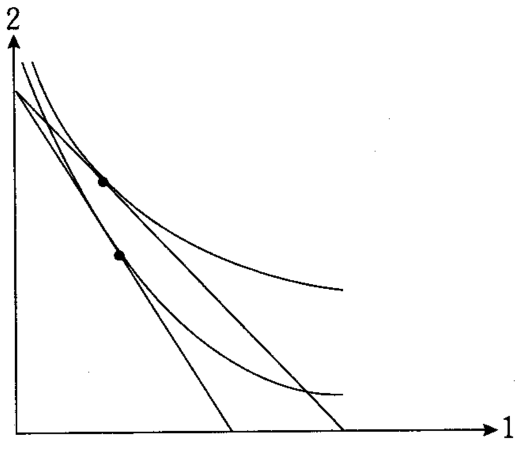

Figure 10.3*b*

IV Revenu compensé et indice du coût de la vie

Le revenu compensé R^c, valeur des demandes compensées aux « nouveaux prix » (*cf.* fiche 9), fournit un moyen d'évaluer globalement (c'est-à-dire, par un seul nombre) l'effet-revenu, en le comparant au revenu R de référence. Pour cela, on peut calculer la différence $R^c - R$, somme qu'il faut verser au consommateur pour « compenser » la hausse de prix, afin qu'il puisse se maintenir – tout au plus – sur la même courbe d'indifférence ; ou alors, on peut calculer l'indice $100 \times R^c/R$, appelé *indice du coût de la vie.* Cet indice est inférieur à l'*indice de Laspeyres,* qui est obtenu en faisant le rapport (multiplié par 100) entre la valeur, aux nouveaux prix (P'), du panier optimal de référence (Q^*), et sa valeur aux prix de départ (P) (soit : $100\ \dfrac{P' \cdot Q^*}{P \cdot Q^*}$). L'indice de Laspeyres est supérieur à l'indice du coût de la vie car il ne tient pas compte de l'effet-substitution, qui permet d'amortir la hausse du prix de certains biens en leur substituant des biens dont le prix n'a pas augmenté (ou a diminué).

Ainsi, dans l'application 1 page 50, comme le revenu compensé est égal à $1 \times 8{,}49 + 2 \times 4{,}25 = 16{,}99$, l'indice du coût de la vie est égal à :

$$100\ \frac{16{,}99}{12} = 141,$$

tandis que l'indice de Laspeyres est égal à :

$$100\ \frac{1 \times 6 + 2 \times 6}{1 \times 6 + 1 \times 6} = 100\ \frac{18}{12} = 150.$$

On constate qu'il est supérieur à l'indice du coût de la vie.

L'*indice de Paasche* est un autre indice utilisé pour évaluer l'incidence sur le pouvoir d'achat du revenu d'une variation de prix ; il se calcule comme l'indice de Laspeyres, mais en prenant pour référence le panier optimal aux « nouveaux prix », Q'. Soit :

$$\text{indice de Paasche : } 100\ \frac{P' \cdot Q'}{P \cdot Q'}.$$

Cet indice est inférieur à celui du coût de la vie (et, *a fortiori,* à celui de Laspeyres), puisque le revenu qui lui correspond ne permet pas l'achat du panier Q^c, et donc le maintien sur la surface d'indifférence d'avant la variation de prix. Ainsi, dans l'application 1, l'indice de Paasche est égal à :

$$100\ \frac{1 \times 6 + 2 \times 3}{1 \times 6 + 1 \times 3} = 133.$$

Il est effectivement inférieur à l'indice du coût de la vie (141).

V La relation de Slutsky

Cette relation fait apparaître les effets substitution et revenu au niveau des dérivées des fonctions de demande et de demande compensée. Elle se démontre à partir de l'égalité :

$$q_i(p_1,p_2,R^c(p_1,p_2,u)) = q_i^c(p_1,p_2,u) \qquad i = 1,2,$$

qui se déduit de la définition même des fonctions de demande, de demande compensée et du revenu compensé (la demande du bien i au revenu compensé est égale à la demande compensée du bien i). En effet, si on dérive par rapport à p_j (j = 1 ou 2) les deux membres de cette égalité, il vient :

(10.1) $$(q_i)'_{p_j}(p_1,p_2,R_c(p_1,p_2,u)) + (q_i)'_R(p_1,p_2,R_c(p_1,p_2,u)) \times (R_c)'_{p_j}(p_1,p_2,u)$$
$$= (q_i^c)'_{p_j}(p_1,p_2,u) \qquad i = 1,2 \qquad j = 1,2.$$

Or on a (*lemme de Shephard* : *cf.* fiche 26) :

$$(R_c)'_{p_j}(p_1,p_2,u) = q_j^c(p_1,p_2,u).$$

Si on pose $R = R_c(p_1,p_2,u)$ (R est donc le revenu qui permet d'atteindre – tout au plus – l'utilité u lorsque les prix sont p_1 et p_2), alors on a :

$$q_j^c(p_1,p_2,u) = q_j(p_1,p_2,R).$$

En remplaçant dans (10,1), on en déduit la *relation de Slutsky* :

$$(q_i)'_{p_j}(p_1,p_2,R) = (q_i^c)'_{p_j}(p_1,p_2,R) - (q_i)'_R(p_1,p_2,R)\, q_j(p_1,p_2,R) \qquad i,j = 1,2.$$

Ainsi, la variation (plus précisément, la dérivée) de la demande se décompose par rapport au prix d'un bien en un effet-substitution $[(q_i^c)'_{p_j}]$ et un effet-revenu $(-(q_i)'_R q_j)$.

11 Variation de bien-être et surplus du consommateur

Si la demande d'un bien diminue lorsque son prix augmente cela signifie que, au fur et à mesure que la consommation de ce bien augmente, le prix que le consommateur est prêt à payer pour en obtenir une unité supplémentaire diminue. Si, comme cela est le cas en concurrence parfaite, on suppose que chaque bien a un prix unique, alors toutes les unités consommées d'un bien donné sont payées au même prix ; toutefois, la satisfaction que chacune procure est variable, puisqu'elle décroît avec la quantité consommée.

La notion de surplus du consommateur a été introduite pour tenir compte de ce phénomène, qui ne fait que traduire le « gain en bien-être » que le consommateur peut obtenir grâce à l'échange. Cependant, la référence au « bien être », ou à la « satisfaction », pose le problème de la *mesure* du surplus. Problème délicat, pour ne pas dire insoluble, puisqu'il suppose une approche *cardinale* de l'utilité. Plusieurs façons ont donc été proposées pour évaluer le surplus du consommateur, toutes étant considérées comme des approximations ; ce qui prouve bien qu'une telle mesure pose problème.

I L'évaluation du surplus à partir de la fonction de demande

La notion de surplus a été introduite en faisant référence à la décroissance de la courbe de demande d'un bien, relativement à son prix. D'où l'idée consistant à mesurer le surplus à partir de cette courbe. Comme on s'intéresse au prix maximum – ou *prix de réserve* – que le consommateur est prêt à payer pour chaque unité de bien, en fonction de la quantité consommée, on trace la *courbe de demande inverse,* qui donne pour chaque quantité q du bien le prix $p(q)$ que le consommateur est disposé à payer pour obtenir une unité supplémentaire du bien, à partir de q.

Ainsi, si on suppose que le bien est indivisible, pour la première unité de bien consommée, ce prix est $p(1)$, pour l'unité suivante, c'est $p(2)$, avec $p(2) < p(1)$ (hypothèse de décroissance de la demande), pour l'unité suivante, c'est $p(3)$, avec $p(3) < p(2)$ ($< p(1)$), et ainsi de suite. Si le prix auquel le bien peut être acheté est p^*, alors le « gain en bien-être » procuré par l'achat de sa première unité est $p(1) - p^*$; il est de $p(2) - p^*$, pour l'achat de sa deuxième unité, etc., jusqu'au moment où cette différence s'annule, pour une quantité

n de bien (n est donc tel que $p(n) = p^*$). Le surplus est donné par la somme des gains en bien-être, $(p(1) - p^*) + (p(2) - p^*) + \ldots + (p(n) - p^*)$, c'est-à-dire par :

$$p(1) + p(2) + \ldots + p(n) - np^*.$$

Graphiquement, ce surplus est mesuré par la *surface* qui se trouve en-dessous de la courbe de demande (inverse), et au-dessus de la droite horizontale qui a pour ordonnée le prix p^* auquel le bien peut être acheté. Cette surface est en gris dans la figure 11.1, où la courbe de demande est « en escalier », puisqu'on a supposé le bien indivisible (la largeur de chaque « marche » de l'escalier est égale à 1).

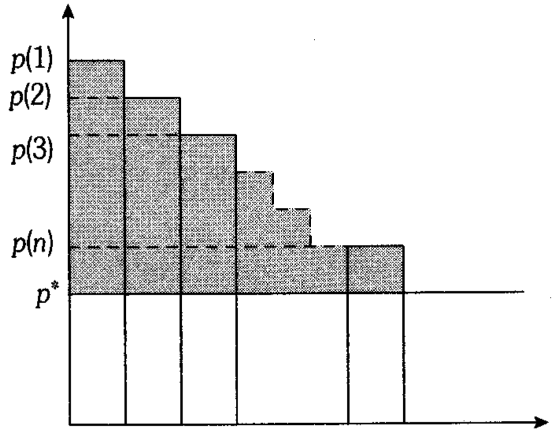

Figure 11.1

Si le bien est indéfiniment divisible, la fonction de demande $d(\cdot)$ est représentée par une courbe, au sens usuel, que l'on suppose strictement décroissante. Cette fonction a donc une inverse, $d^{-1}(\cdot)$, qui associe à chaque quantité q du bien le prix (maximum) $p(q)$ que le consommateur est disposé à payer pour cette quantité; comme on a, par définition, $p(q) = d^{-1}(q)$, on note $p(\cdot)$ la fonction de demande inverse. Avec ces notations, le surplus lorsque le prix est p^*, et la demande $d(p^*)$, est donné, par définition, par l'intégrale :

$$\int_0^{d(p^*)} (p(q) - p^*)dq.$$

APPLICATION

Supposons que la fonction de demande est la fonction affine $d(\cdot)$ définie par :

$$d(p) = a - bp \qquad a > 0, b > 0.$$

La fonction de demande inverse est donc $p(q) = (a - q)/b$. Il s'ensuit que le surplus lorsque le prix est p^* (avec $0 \leqslant p^* \leqslant a/b$) est donné par l'intégrale :

$$\int_0^{a - bp^*} \frac{a - q - bp^*}{b} dq.$$

Soit, après calculs :

$$\int_0^{a - bp^*} \frac{a - q - bp^*}{b} dq = \frac{1}{2b} (a - bp^*)^2.$$

C'est la surface du triangle (rectangle) hachuré de la figure 11.2, dont les côtés ont pour longueur $a - bp^*$ et $a/b - p^*$.

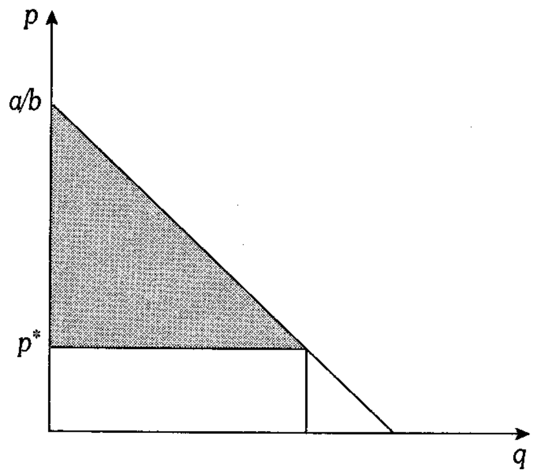

Figure 11.2

II La justification par la fonction d'utilité quasi linéaire

Le surplus du consommateur défini à partir de la courbe de demande pose problème, notamment en raison de l'existence de *l'effet-revenu* associé à toute variation de prix (on ne peut donc attribuer exclusivement à celle-ci la variation du bien-être du consommateur).

Il existe cependant une certaine catégorie de fonctions d'utilité pour lesquelles le surplus défini à partir de la courbe de demande peut être justifié en tant que mesure du gain de bien-être. C'est le cas des fonctions d'utilité *quasi linéaires* (*cf.* fiche 8), à condition de considérer la variable « linéaire » (dont on notera les quantités x) comme représentant, en numéraire, « tous les biens » autres que celui dont on cherche à évaluer le surplus. Plus précisément, on retient pour fonction d'utilité :

$$U(q,x) = x + u(q),$$

où $u(\cdot)$ est supposée strictement croissante et strictement concave (utilité marginale strictement positive et strictement décroissante). Si le revenu du consommateur est noté R, alors sa dépense pour l'achat de x en « biens autres » est $R - pq$. Comme ces biens servent de numéraire, on a donc $R - pq = x$; en remplaçant dans la fonction d'utilité, et en posant $V(q,R) = U(q,R - pq)$, il vient :

$$V(q,R) = R - pq + u(q).$$

On remarque que cette fonction est telle que l'« utilité marginale du revenu », $V'_R(q,R)$, est constante (elle est égale à 1). Le « gain en bien-être » du consommateur entre la consommation de la quantité q du bien, au prix p, et une consommation nulle est $V(q,R) - V(0,R)$, soit : $u(q) - u(0) - pq$. Mais, comme par définition de l'intégrale :

$$\int_0^q u'(x)dx = u(q) - u(0),$$

et comme la règle de maximisation de l'utilité à prix donnés exige que $u'(q) = p(q)$, quelle que soit la quantité q considérée, on a :

$$u(q) - u(0) - pq = \int_0^q (p(x) - p)dx.$$

Le terme de gauche est le gain en bien-être, $V(q, R) - V(0, R)$, alors que celui de droite est le surplus, tel qu'il a été défini plus haut.

III L'évaluation par la variation du revenu compensé

La variation du revenu compensé – ou *variation compensatoire* – constitue une autre façon d'évaluer le surplus du consommateur. En effet, le revenu compensé est, par définition, un revenu qui permet de se maintenir au même niveau de satisfaction – ou d'utilité – quand le prix d'un bien varie, et ce à partir d'une situation de référence (*cf.* fiche 9). Ainsi, quand le prix d'un bien varie, la variation compensatoire donne une évaluation monétaire (en numéraire) de ce que le consommateur est prêt à payer pour maintenir son bien-être, et donc de l'effet sur celui-ci de la variation de prix. Cette évaluation n'est plus absolue, comme dans le cas précédent, mais relative à une situation de référence (ou « de départ »).

Supposons que celle-ci est caractérisée par un prix p du bien auquel on s'intéresse (du point de vue du surplus) et par un revenu R, grâce auquel le consommateur peut atteindre une utilité maximum u. Son revenu compensé, $R^c(p, u)$, est alors égal à R. Lorsque le prix du bien varie, de p à p', le revenu qui permet de compenser cette variation, à utilité inchangée, est égal à :

$$R^c(p', u) - R^c(p, u).$$

Cette différence sera d'autant plus importante que le bien considéré est apprécié par le consommateur ; c'est elle qui servira donc à évaluer la variation du surplus de celui-ci, entre la situation initiale et la situation finale.

Une autre façon d'interpréter cette différence, plus proche de celle qui a été utilisée dans le cas de l'évaluation du surplus à partir de la fonction de demande usuelle, consiste à prendre pour situation de départ le prix p' et le revenu $R^c(p', u)$. Dans ce cas, la différence $R^c(p', u) - R^c(p, u)$ est la *disposition à payer* du ménage lorsque le prix diminue de p' à p, c'est-à-dire la somme *maximum* qui peut être retranchée de son revenu, en contrepartie de cette baisse de prix.

APPLICATION

Supposons que la fonction d'utilité est $U(q_1,q_2) = q_1 q_2$, et que la situation de référence est $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $R = 12$. Comme on est en présence d'une fonction d'utilité du type Cobb-Douglas, avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, les demandes des biens 1 et 2 sont, respectivement, $R/2p_1$ et $R/2p_2$ (*cf.* fiche 7), soit, pour $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $R = 12$: 6 et 6. L'utilité procurée par le panier optimal (6,6) est $6 \times 6 = 36$.

Supposons maintenant que le prix du bien 1 augmente ; plus précisément, qu'il double. Le revenu compensé $R^c((2,1),36)$, qu'on notera R', est solution de l'équation

$$U\left(\frac{R}{2 \times 2}, \frac{R}{2 \times 1}\right) = 36\,;$$

il est donc tel que :

$$\frac{R'}{4}\frac{R'}{2} = 36.$$

D'où : $R' = 17{,}04$. Le surplus du consommateur est donc ici égal à la différence entre R' et R, c'est-à-dire à $17{,}04 - 12 = 5{,}04$. Autrement dit, le consommateur ayant un revenu égal à 12 est prêt à accepter le doublement du prix du bien 1 (de 1 à 2, avec $p_2 = 1$, inchangé), si on lui propose d'augmenter son revenu de 5,04, au moins. Ou alors, autre interprétation possible, si le consommateur a un revenu égal à 17,04, il est prêt à ce que celui-ci soit, au plus, diminué de 5,04, si le prix du bien 1 diminue de moitié (de 2 à 1), celui du bien 2 demeurant inchangé.

IV Surplus et variation équivalente du revenu

La variation compensatoire du revenu prend pour référence la situation *avant* que le changement de prix ait eu lieu. Elle est en quelque sorte conservatrice. La variation équivalente prend elle pour référence la situation qui prévaut *après* que ce changement ait eu lieu. Si on note u' l'utilité atteinte au « nouveau » prix p', alors la variation équivalente est donnée par la différence :

$$R^c(p', u') - R^c(p, u').$$

APPLICATION

Si on reprend l'exemple de l'application précédente, alors pour un revenu égal à 12 et des prix $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$, la demande du bien 1 est $12/(2 \times 2) = 3$, celle du bien 2 étant $12/(2 \times 1) = 6$. Il s'ensuit que $u' = 3 \times 6 = 18$. Le revenu R qui permet aux prix $p_1 = 1$ et $p_2 = 1$ de parvenir (au maximum) à une utilité égale à 18 est tel que :

$$\frac{R}{2 \times 1}\frac{R}{2 \times 1} = 18.$$

Soit $R = \sqrt{72} = 8{,}49$, la variation compensatoire étant égale à $12 - 8{,}49 = 3{,}51$.

12 Le choix du producteur en concurrence parfaite

L'objectif du producteur – ou de l'entreprise – est de *maximiser son profit*, celui-ci étant donné par la différence entre ses recettes et ses dépenses. Plus précisément, le producteur cherche à déterminer le panier d'inputs $(q_1, ..., q_n)$ – à partir duquel il peut produire $f(q_1, ..., q_n)$ d'output ($f(\cdot)$ étant sa *fonction de production* : *cf.* fiche 4) –, qui rend maximum la différence :

$$pf(q_1, ..., q_n) - (p_1q_1 + ... + p_nq_n),$$

où $pf(q_1, ..., q_n)$ est sa recette lorsque le prix de l'output est p, et où $p_1q_1 + ... + p_nq_n$ est sa dépense en inputs, lorsque le prix de l'input i est p_i $(i = 1, ..., n)$.

En concurrence parfaite, on suppose que le producteur ne peut pas proposer un prix pour ce qu'il vend ou achète et que les prix sont affichés par une entité extérieure aux agents du modèle. En outre, ceux-ci prennent leurs décisions sans tenir compte de leur éventuel effet sur les prix affichés (*cf.* fiche 5). Sous ces hypothèses, le choix du producteur porte exclusivement sur le panier d'inputs $(q_1, ..., q_n)$ (avec lequel il produit $f(q_1, ..., q_n)$). C'est pourquoi on note $\pi(q_1, ..., q_n)$ son profit en concurrence parfaite. On a donc :

$$\pi(q_1, ..., q_n) = pf(q_1, ..., q_n) - (p_1q_1 + ... + p_nq_n). \tag{12.1}$$

I Le choix du producteur dans le cas usuel

En concurrence parfaite, le producteur – ou l'entreprise – pense qu'il pourra, aux prix affichés, acheter tous les inputs qu'il demande et vendre le produit qu'il offre. Autrement dit, il fait son choix sans se soucier des éventuelles contraintes qu'il pourrait subir au niveau de ses achats ou de ses ventes. Par conséquent, son choix se réduit à la recherche du maximum de la fonction $\pi(\cdot)$. Si $f(\cdot)$ est dérivable, une *condition nécessaire* pour que le panier d'inputs $(q_1{}^*, ..., q_n{}^*)$ permette d'obtenir un profit maximum est qu'il annule les dérivées partielles de la fonction $\pi(\cdot)$. C'est la *condition du premier ordre* :

$$\pi'_{q_i}(q_i^*, ..., q_n^*) = 0 \qquad i = 1, ..., n. \tag{12.2}$$

Comme le producteur pense que son choix n'influence en rien les prix $p, p_1, ..., p_n$ – il voit en eux des paramètres indépendants de ses offres et ses demandes – la condition (12.2) s'écrit, compte tenu de la forme de la fonction $\pi(\cdot)$ [donnée par la formule (12.1)] :

$$pf'_{q_i}(q_i^*, ..., q_n^*) = p_i \qquad i = 1, ..., n. \tag{12.3}$$

La condition (12.3) s'interprète de la façon suivante : le producteur va demander une quantité de l'input i, quel qu'il soit, telle que son produit marginal $pf'_{q_i}(q_i^*, \ldots, q_n^*)$ (valeur du produit obtenue avec « la dernière unité utilisée » de cet input) soit égal à son prix (coût de cette dernière unité). Autrement dit, et de façon un peu vague, la demande d'inputs est telle qu'elle épuise les possibilités de faire un profit supplémentaire en augmentant la production (et donc en achetant plus d'inputs).

Cette interprétation de la condition (12.3) n'a toutefois de sens que si le produit marginal de chaque input est décroissant, donc que si *les productivités marginales sont décroissantes*, du moins en $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$ (*cf.* fiche 4).

Si, en outre, les rendements d'échelle étaient croissants en $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$, le profit n'y serait pas maximum (il pourrait être augmenté en accroissant l'échelle de production). La condition (12.3) n'a donc de sens que si *les rendements d'échelle sont décroissants ou constants en* $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$.

La condition (12.3) se présente comme un système de n équations à n inconnues (les demandes d'inputs $q_1^*, \ldots, q_n^*$). S'il a une solution, celle-ci dépend des prix des inputs et de celui de l'output. Si on veut tenir compte de cette dépendance, on la note $q_i(p_1, \ldots, p_n, p)$ plutôt que q_i^* ($i = 1, \ldots, n$) et on appelle la fonction $q_i(\cdot)$ *fonction de demande* de l'input i de l'entreprise.

L'*offre* de l'entreprise aux prix $p_1, \ldots, p_n, p$, s'obtient en « entrant » les inputs « optimaux » q_i^*, $i = 1, \ldots, n$, dans la fonction de production. Si on note $s(\cdot)$ la fonction d'offre de l'entreprise, cette fonction est donc définie par l'égalité :

$$(12.4) \qquad s(p_1, \ldots, p_n, p) = f(q_1(p_1, \ldots, p_n, p), \ldots, q_n(p_1, \ldots, p_n, p)).$$

Cette offre ne dépend que des prix affichés, des inputs et de l'output (conséquence de l'hypothèse de concurrence parfaite). Toutefois, souvent en microéconomie, seul le prix de l'output apparaît explicitement dans la fonction d'offre ; la formule (12.4) se réduit alors à :

$$s(p) = f(q_1(p), \ldots, q_n(p)).$$

Notons enfin qu'on déduit des conditions (12.3), pour deux inputs i et j quelconques dont les productivités marginales sont non nulles, l'égalité :

$$(12.5) \qquad \frac{f'_{q_i}(q_i^*, \ldots, q_n^*)}{f'_{q_j}(q_i^*, \ldots, q_n^*)} = \frac{p_i}{p_j}.$$

On retrouve la condition d'égalité entre le taux marginal de substitution de deux biens demandés (ici, des inputs) et le rapport de leurs prix, condition déjà rencontrée dans la théorie du choix du consommateur en concurrence parfaite (*cf.* fiche 7). Lorsqu'il n'y a que deux inputs, l'ensemble des paniers de biens qui vérifient cette relation peut être représenté par une courbe, le *sentier d'expansion* (obtenu en faisant varier la quantité produite).

APPLICATION

Soit une entreprise dont la fonction de production $f(\cdot)$ est définie par l'égalité :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/2}\, q_2^{1/4}.$$

$f(\cdot)$ est donc une fonction de Cobb-Douglas (*cf.* fiche 3). Comme elle est homogène de degré $1/4 + 1/2 = 3/4$ (< 1), elle est à rendements d'échelle décroissants ; en outre, les productivités marginales $f'_{q_1}(q_1, q_2)$ $(= \frac{1}{2}q_1^{-1/2}\, q_2^{1/4})$ et $f'_{q_2}(q_1, q_2)$ $(= \frac{1}{4}q_1^{1/2}\, q_2^{-3/4})$ sont décroissantes. Les conditions nécessaires pour obtenir un profit maximum sont donc vérifiées.

Les conditions (12.3) prennent ici la forme du système de deux équations à deux inconnues :

$$\text{(12.6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}pq_1^{*-1/2}\, q_2^{*1/4} = p_1 \\ \dfrac{1}{4}pq_1^{*1/2}\, q_2^{*-3/4} = p_2 \end{cases}$$

En faisant le rapport, membre à membre, de ces deux équations, on obtient l'équation du sentier d'expansion :

$$\text{(12.7)} \qquad \frac{2q_2^*}{q_1^*} = \frac{p_1}{p_2}.$$

C'est, dans le plan des inputs, une droite qui passe par l'origine et de pente $p_1/2p_2$. De (12.7), on tire : $q_2^* = (p_1/2p_2)q_1^*$. En remplaçant dans (12.6), on obtient une équation qui n'a que q_1^* pour inconnue. Soit, en posant $k = p_1/2p_2$:

$$pq_1^{*-1/2}(kq_1^*)^{1/4} = 2p_1.$$

D'où les demandes des biens 1 et 2 :

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{p^4 k}{(2p_1)^4} = \dfrac{p^4}{32p_1^3 p_2} \\ \\ q_2^* = \dfrac{p^4}{(8p_1p_2)^2} \end{cases}$$

En remplaçant dans la fonction de production on obtient la fonction d'offre :

$$s(p_1, p_2, p) = f(q_1^*, q_2^*) = f\left(\frac{p^4}{32p_1^3p_2}, \frac{p^4}{(8p_1p_2)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{p^4}{32p_1^3p_2}\right)^{1/2} \left(\frac{p^4}{(8p_1p_2)^2}\right)^{1/4} = \frac{p^3}{8 \times 2^{1/4}p_1^2p_2}.$$

III Le cas des rendements d'échelle constants

Ce cas représente une situation limite, entre rendements croissants et rendements décroissants. Il présente un certaine nombre de particularités. Ainsi, il ne peut y avoir de production (finie) en concurrence parfaite que si elle procure un profit nul. En effet, comme le profit s'écrit :

$$\pi(q_1, \ldots, q_n) = pf(q_1, \ldots, q_n) - p_1q_1 - \ldots - p_nq_n$$

alors :

$$\pi(\lambda q_1, ..., \lambda q_n) = pf(\lambda q_n, ..., \lambda q_n) - p_1\lambda q_1 - ... - p_n\lambda q_n = \lambda\pi(q_1, ..., q_n).$$

Ainsi, si $\pi(q_1, ..., q_n) \neq 0$, alors l'entreprise pourrait choisir un panier $(\lambda q_1, ..., \lambda q_n)$ avec λ « aussi grand qu'elle veut » – puisqu'en concurrence parfaite il est supposé que les agents font leur choix sans tenir compte d'éventuels rationnements –, dans le but de faire un profit (théoriquement) infini. Ce qui n'est évidemment pas réalisable. Par conséquent, en concurrence parfaite, les rendements d'échelle constants ne sont compatibles qu'avec un profit négatif ou nul. Pour que cela soit le cas, il faut que le prix de vente du produit soit inférieur ou égal à son coût unitaire de production. Si on note c_u ce dernier, alors l'offre :

- est nulle lorsque le prix est inférieur à c_u ;
- peut prendre n'importe quelle valeur lorsque le prix est égal à c_u ;
- n'est pas définie pour un prix strictement supérieur à c_u.

Son graphe a donc la forme suivante :

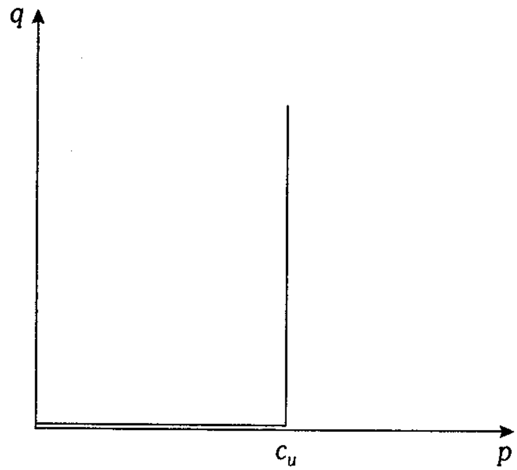

Figure 12.1

Pour déterminer le coût unitaire, on part de la condition du premier ordre (12.3) (on suppose, pour simplifier les notations, qu'il n'y a que deux inputs) :

$$\begin{cases} pf'_{q_1}(q_1^*, q_2^*) = p_1 \\ pf'_{q_2}(q_1^*, q_2^*) = p_2 \end{cases}$$

La fonction $f(\cdot)$ étant homogène de degré 1, ses dérivées partielles sont homogènes de degré 0 (théorème d'Euler), et ne dépendent donc que du rapport q_1^*/q_2^* (si $q_2^* \neq 0$). Les conditions d'optimalité peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} pf'_{q_1}(q_1^*/q_2^*, 1) = p_1 \\ pf'_{q_2}(q_1^*/q_2^*, 1) = p_2 \end{cases}$$

Ce système d'équations n'a, en fait, qu'une seule inconnue, le rapport q_1^*/q_2^*. Il s'ensuit que les paramètres – ici les prix – qui y interviennent doivent être liés. Pour trouver ce lien, on « extrait » q_1^*/q_2^* de la première équation, en fonction de p et de p_1 ; ce qu'on écrit : $q_1^*/q_2^* = \varphi(p, p_1)$.

En remplaçant dans la deuxième équation on obtient la condition liant p, p_1 et p_2 :

$$pf'_{q_2}(\varphi(p, p_1), 1) = p_2.$$

La valeur du prix du produit p qui vérifie cette relation donne le coût unitaire (minimum) c_u.

APPLICATION

Supposons que la fonction de production $f(\cdot)$ est définie par la formule :

$$f(q_1, q_2) = 2(q_1 q_2)^{1/2}.$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} p(q_2^*/q_1^*)^{1/2} = p_1 \\ p(q_1^*/q_2^*)^{1/2} = p^2 \end{cases}$$

De la première équation on tire $q_2^*/q_1^* = (p_1/p)^2$. En remplaçant dans la deuxième, on trouve la relation liant les paramètres (les prix) du modèle :

$$p = (p_1 p_2)^{1/2}.$$

La fonction d'offre de concurrence parfaite est donc dans ce cas :

– offre nulle si $p < (p_1 p_2)^{1/2}$;
– offre indéterminée (entre 0 et l'infini) si $p = (p_1 p_2)^{1/2}$;
– offre (théoriquement) infinie si $p > (p_1 p_2)^{1/2}$.

13 La fonction de coût

La fonction d'offre de concurrence parfaite peut être calculée soit directement à partir de la fonction de production (et des prix affichés des biens), comme cela a été fait dans la fiche 12, soit indirectement, à partir de la fonction de coût, qui se déduit elle-même de la fonction de production.

La fonction de coût est notamment utilisée en microéconomie pour introduire dans l'analyse de l'entreprise les *coûts fixes*, dus à l'existence d'*indivisibilités*, qui sont souvent elles-mêmes considérées comme une des raisons d'être des entreprises. La référence aux coûts fixes permet aussi d'introduire l'idée d'adaptation à « long terme » de la production de l'entreprise.

I La fonction de coût déduite de la fonction de production

Par définition, une fonction de coût $c(\cdot)$ associe à chaque quantité de produit q, le coût minimum $c(q)$ en inputs nécessaires pour la produire. La fonction de coût est donc la solution du programme :

$$\text{minimiser } p_1q_1 + \ldots + p_nq_n,$$
$$\text{sous la contrainte } f(q_1,\ldots,q_n) = q,$$

où $f(\cdot)$ désigne la fonction de production de l'entreprise et où les prix p sont donnés et considérés par l'entreprise comme indépendants de ses choix (hypothèse de concurrence parfaite ; *cf.* fiche 6).

La résolution du programme ci-dessus passe par la détermination des quantités demandées d'inputs, qu'on va noter $q_i(q)$, $i = 1,\ldots,n$, puisqu'elles dépendent de la quantité produite q. Le coût minimum pour produire q est alors :

$$c(q) = p_1q_1(q) + \ldots + p_nq_n(q).$$

Si la fonction de production a des isoquantes de type hyperbolique, alors les demandes d'inputs doivent vérifier la condition d'optimalité : taux marginal de substitution = rapport de prix, tout en satisfaisant la contrainte : $f(q_1,...,q_n) = q$. S'il n'y a que deux inputs, elles sont donc solution du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{f'_{q_1}(q_1,q_2)}{f'_{q_2}(q_1,q_2)} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ f(q_1,q_2) = q. \end{cases}$$

La solution, $(q_1(q), q_2(q))$ de ce système se trouve donc sur le *sentier d'expansion* (*cf.* fiche 12). Elle peut être déterminée graphiquement en traçant la tangente de pente $-p_1/p_2$ à l'isoquante de niveau q, comme cela est fait dans la figure 13.1 (les droites de pente $-p_1/p_2$ sont appelées *droites d'isocoût*).

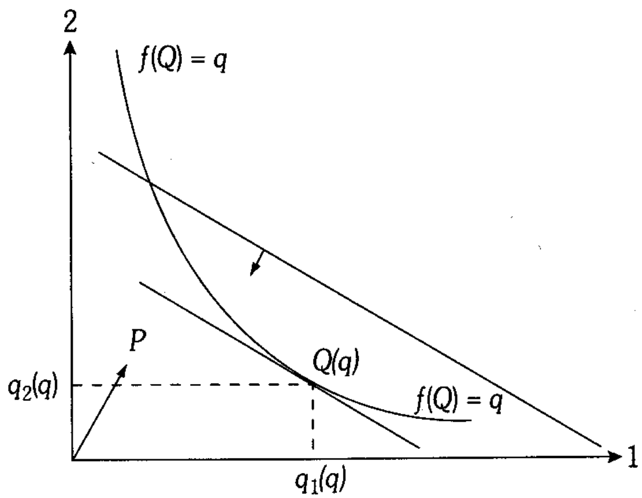

Figure 13.1

APPLICATION

On suppose que la fonction de production $f(\cdot)$ est définie par la formule :

$$f(q_1,q_2) = q_1 q_2.$$

C'est donc une fonction de Cobb-Douglas.

Ses isoquantes étant des hyperboles, les demandes d'inputs qui minimisent le coût pour produire q sont solution du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{q_2}{q_1} = \dfrac{p_1}{p_2} & \text{(TMS = rapport des prix)} \\ q_1 q_2 = q & \text{(isoquante de niveau } q\text{)} \end{cases}$$

Après calculs (simples), on obtient cette solution, qui dépend évidemment de q (et des prix) :

$$\begin{cases} q_1(q) = \sqrt{\dfrac{p_2 q}{p_1}} & \text{(demande de l'input 1)} \\ q_2(q) = \sqrt{\dfrac{p_1 q}{p_2}} & \text{(demande de l'input 2)} \end{cases}$$

La fonction de coût est donc :

$$\begin{cases} c(q) = p_1 \sqrt{\dfrac{p_2 q}{p_1}} + p_2 \sqrt{\dfrac{p_1 q}{p_2}} \\ \quad = 2\sqrt{p_1 p_2 q} \end{cases}$$

III Coûts fixes, coût moyen, coût marginal

Jusqu'à présent, on a supposé que la production varie de façon continue, ou progressive, avec les quantités d'inputs, ceux-ci étant considérés comme indéfiniment divisibles. Afin de tenir compte de l'existence de coûts incompressibles, indépendants de la quantité produite, on introduit dans la fonction de coût un terme constant, noté c_F, et qui représente donc des *coûts fixes*. La fonction de coût s'écrit alors :

$$C(q) = c(q) + c_F,$$

où $c(q)$ désigne les *coûts variables*, qui ne concernent que les inputs divisibles (ceux qui interviennent dans la fonction de production).

À partir de la fonction de coût ainsi élargie, on définit la fonction de coût moyen, $C_M(\cdot)$, qui associe à tout $q > 0$, le coût unitaire $C(q)/q$. Soit :

$$C_M(q) = \frac{c(q) + c_F}{q}.$$

Ainsi, pour des valeurs de q proches de 0, le coût moyen tend vers l'infini, à cause du terme c_F/q. Ce terme devient en revanche de plus en plus petit au fur et à mesure que q augmente ; si on suppose que le coût variable $c(q)$ augmente avec q, et plus vite que lui, alors la fonction de coût moyen est d'abord décroissante (lorsque les q sont « petits »), puis croissante. Son graphe est donc « en U » : il existe un niveau de production q_0 pour lequel le coût unitaire est minimum. La courbe de *coût marginal*, dérivée de la fonction de coût, passe d'ailleurs par ce minimum. Autrement dit, on a :

$$C_M(q°) = C'(q°).$$

Cette propriété vient immédiatement en dérivant $CM(\cdot)$ et en annulant cette dérivée au minimum $q°$. En effet, comme $C'_M(q) = (c'(q)q - (c(q) + c_F))/q_2$, on a :

$$C'_M(q°) = 0 \Rightarrow q°c'(q°) - (c(q°) + c_F) = 0 \Rightarrow c'(q°) = (c(q°) + c_F)/q° \;(= C_M(q°)).$$

La situation est résumée dans la figure 13.2 :

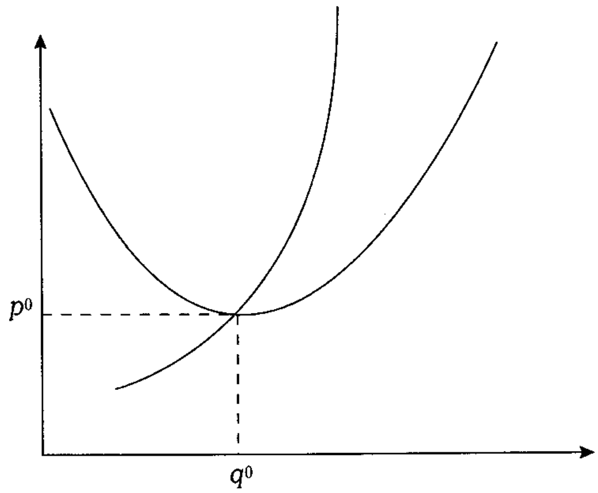

Figure 13.2

III L'offre de concurrence parfaite

Comme pour les inputs, le prix de l'output est considéré comme donné, et l'entreprise pense que ses choix n'ont pas d'influence sur lui (hypothèse de concurrence parfaite). Si on note p ce prix, le profit de concurrence parfaite $\pi(q)$, lorsque la production est q, est donné par la différence entre la recette pq et le coût $C(q)$. Soit :

$$\pi(q) = pq - C(q).$$

La quantité q^* qui maximise $\pi(\cdot)$ doit donc être telle qu'elle vérifie la condition du premier ordre :

$$\pi'(q) = 0,$$

et donc telle que :

$$C'(q) = p.$$

Pour que q^* procure un profit maximum, il faut en outre que le coût marginal $C'(\cdot)$ soit croissant en q^* (condition du second ordre). Si on suppose que tel est le cas – et, plus généralement, que le coût marginal est toujours croissant, quel que soit q – alors *le profit de concurrence parfaite est maximum si la production est telle que le coût marginal est égal au prix*. La figure 13.3 montre comment, sous ses hypothèses, la production q^* peut être déterminée graphiquement.

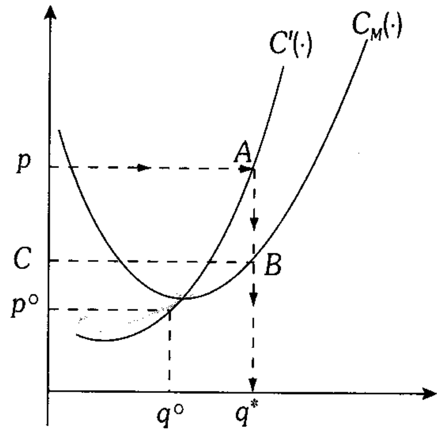

Figure 13.3

Lorsque le prix p est supérieur à $p^\circ = C_M(q^\circ)$, l'entreprise fait un profit unitaire égal à $p - C_M(q^*)$ (longueur du segment AB), son profit total étant donc égal à $q^*(p - C_M(q^*))$ (surface du rectangle $pABC$).

Si, en revanche, le prix est inférieur à $C_M(q^\circ)$, le profit est négatif, quel que soit q. L'entreprise n'a donc aucune raison de produire : son offre est nulle.

Ainsi, comme $C'(q^*) = p \Rightarrow q^* = C'^{-1}(p)$ (en supposant que la fonction $C'(\cdot)$ est inversible), la fonction d'offre $s(\cdot)$ de l'entreprise est donnée par :

$$\begin{cases} s(p) = 0, \text{ si } p < C_M(q^\circ) \\ s(p) = C'^{-1}(p), \text{ si } p \geqslant C_M(q^\circ). \end{cases}$$

Elle est donc discontinue, comme dans la figure 13.4.

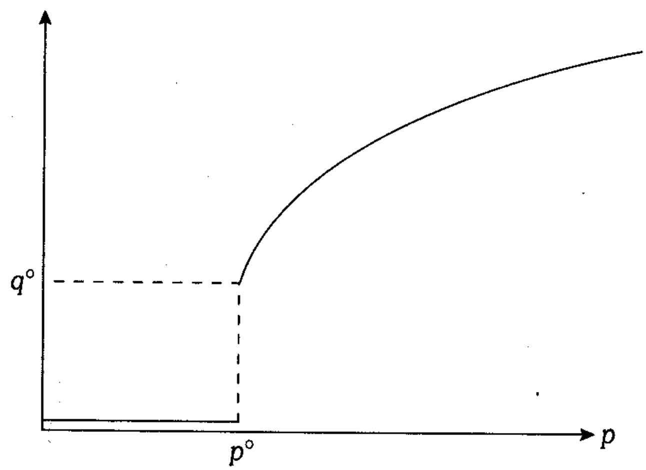

Figure 13.4

APPLICATION

On suppose que la fonction de coût est :

$$C(q) = q^3 + q + 16.$$

Le coût moyen est donc :

$$C_M(q) = q^2 + 1 + \frac{16}{q}.$$

Sa courbe représentative est « en U ». Elle passe par un minimum. Comme sa dérivée :

$$C_M'(q) = 2q - \frac{16}{q^2},$$

s'annule pour la production :

$$q° = 2,$$

le prix en-dessous duquel le profit est négatif est donc égal à :

$$C_M(2) = 13.$$

L'égalité entre coût marginal et prix étant ici :

$$3q^2 + 1 = p,$$

on a donc, comme on ne considère que des quantités positives :

$$q = \sqrt{\frac{p-1}{3}} \text{ (à condition que } p > 1).$$

D'où la fonction d'offre de l'entreprise :

– $s(p) = 0$, si $p < 13$,

– $s(p) = \sqrt{\frac{p-1}{3}}$, si $p \geqslant 13$.

14 La fonction de coût de longue période

La fonction de coût comporte généralement un terme constant, destiné à représenter des coûts fixes, indépendants de la quantité produite. Tel est le cas, par exemple, des équipements nécessaires à la production (locaux, machines). La « fixité » de ceux-ci n'est cependant que relative : elle résulte de décisions passées, mais des décisions présentes (investissements, par exemple) peuvent les modifier dans le futur. D'où l'attention accordée au cas idéal, où les équipements seraient les mieux adaptés pour chaque niveau de production, c'est-à-dire où *l'ensemble des coûts* (variables et « fixes ») serait minimum ; lorsqu'on se réfère à ce cas, on dit qu'il a trait à « la longue période », celle pendant laquelle l'adaptation des équipements a eu le temps de s'effectuer, et ce pour chaque niveau de production possible.

Pour déterminer la fonction de coût de longue période, on procède *en deux étapes* : d'abord, on se donne la quantité produite q et on détermine les équipements les mieux adaptés (qui minimisent l'ensemble des coûts, variables et fixes, qu'entraîne la production de q) ; ensuite, on fait varier q, et avec elle les équipements calculés à l'étape précédente ; en remplaçant dans la fonction de coût d'« origine », à coûts fixes donnés, dite *de courte période,* on obtient la fonction de coût *de longue période,* qui ne dépend plus que de la quantité produite.

I Le cas du capital, en concurrence parfaite

Le capital, noté K, représente ici les biens d'équipement. Son coût est donc un coût fixe, dont on suppose néanmoins qu'il s'adapte, dans une perspective « de longue période ». Une façon de procéder pour déterminer le coût de longue période consiste alors à partir d'une fonction de production $f(\cdot)$, comme on l'a fait dans la fiche précédente, puis de calculer le coût minimum pour chaque quantité produite, avec un capital « adapté ». Si on suppose, pour simplifier les notations et les calculs, qu'en dehors du capital, il n'y a qu'un seul autre input, le travail, alors la production q pour un couple capital-travail (K,L) est telle que :

(14.1) $$q = f(K,L),$$

avec le coût en inputs :

$$p_L L + p_K K,$$

$p_K K$ étant ici considéré comme un coût fixe.

Si on suppose des isoquantes « de type hyperbolique » (strictement convexes et asymptotes aux axes), pour que le coût soit minimum il faut que le taux marginal de substitution soit égal au rapport des prix (*cf.* fiche 12), c'est-à-dire que :

$$\text{(14.2)} \qquad \mathrm{TMS}_{K/L}(K,L) = \frac{p_L}{p_K}.$$

Cette égalité établit un lien entre les quantités optimales de travail et de capital, lien que l'on peut noter : $L = \varphi(K)$ ($\varphi(\cdot)$ est donc une *fonction implicite* – *cf.* fiche 26 – définie par la condition (14.2)). D'où, en reportant dans la contrainte (14.1) :

$$\text{(14.3)} \qquad q = f(K, \varphi(K)).$$

L'équation (14.3) donne le lien – implicite et « de longue période » – entre la quantité produite q et le capital « adapté » K. Si on peut expliciter ce lien, c'est-à-dire le mettre sous la forme :

$$K = \Psi(q),$$

il apparaît alors clairement que c'est le capital qui s'adapte à la quantité produite.

Le coût de longue période s'obtient en remplaçant K par $\Psi(q)$ dans l'expression donnant la dépense en inputs (L étant donné par (14.2), en y remplaçant aussi K par $\Psi(q)$).

APPLICATION

On suppose que la fonction de production $f(\cdot)$ est du type Cobb-Douglas (*cf.* fiche 4), plus précisément qu'elle est donnée par la formule :

$$f(K,L) = K^{1/4}L^{1/2},$$

et que $p_K = 1$, $p_L = 2$. Pour K fixé, comme il n'y a donc qu'un seul input variable, le travail L, la quantité de travail pour produire q se déduit de l'égalité $q = K^{1/4}L^{1/2}$. Soit : $L = (q/K^{1/4})^2 = q^2/K^{1/2}$. D'où la fonction de coût de courte période :

$$\text{(14.4)} \qquad C(q) = 1 \times K + 2 \times \frac{q^2}{K^{1/2}} = K + \frac{2q^2}{K^{1/2}}.$$

Elle est représentée par une branche de parabole, dont les coefficients dépendent de la valeur donnée au capital K.

Pour déterminer la fonction de coût de longue période, $c_{LP}(\cdot)$, on cherche le capital K ($= \psi(q)$) le mieux adapté à chaque production q (qui minimise l'ensemble des coûts pour la produire). Pour cela, on part de l'égalité entre le taux marginal de substitution et le rapport des prix – soit, avec les notations adoptées ici, $\mathrm{TMS}_{K/L}(K,L) = p_L/p_K$ –, qui est une condition d'optimalité (de minimisation des coûts) car on est dans le cas usuel (isoquantes hyperboliques et rendements d'échelle décroissants). Cette condition s'écrit, dans le cas présent où $\mathrm{TMS}_{K/L}(K,L) = 2K/L$:

$$\frac{2K}{L} = \frac{2}{1}.$$

D'où :

$$L = K.$$

Ainsi, pour que le coût (« de courte période ») soit minimum, il faut que $L = K$ (c'est l'égalité : $L = \varphi(K)$ de la présentation générale). En remplaçant dans la fonction de production, il vient :

$$q = f(K,K) = K^{1/4}K^{1/2} = K^{3/4}.$$

D'où :

$$K = q^{4/3}$$

(c'est l'égalité $K = \psi(q)$ de la présentation générale). La quantité de capital adaptée à la production q est donc égale à $q^{4/3}$. Il résulte également de la condition d'optimalité de courte période, $L = K$, que la quantité de travail adaptée à la production q est : $L = q^{4/3}$. D'où le coût de longue période pour produire q:

$$\begin{aligned} c_{Lp}(q) &= 1 \times q^{4/3} + 2 \times q^{4/3} \\ &= 3q^{4/3}. \end{aligned}$$

La situation est décrite dans la figure 14.1.

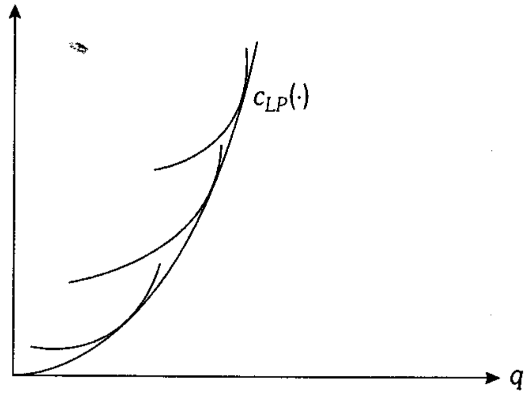

Figure 14.1

Remarque :

Si on suppose que le capital est un input comme un autre, donc variable, comme le travail, alors la fonction qui vient d'être obtenue est aussi celle de courte période (on la détermine par un calcul semblable à ceux qui sont faits dans la fiche 13).

III Le cas général

Dans ce cas, si on note $c(q,k)$ le coût (minimum) pour produire q lorsque la capacité de production est k, on détermine d'abord la valeur de celle-ci qui minimise la fonction $c(q,\cdot)$ pour une production (quelconque) q donnée. Pour cela, on part de la *condition du premier ordre* (en supposant que la fonction de coût est dérivable *cf.* fiche 26) :

(14.5) $$c'_k(q,k) = 0.$$

On suppose ensuite que cette équation – dont l'inconnue est k – a une solution unique (et positive). Comme cette solution dépend de la quantité produite q, qui joue ici le rôle d'un paramètre, on la notera $k(q)$ ($k(\cdot)$ est donc la fonction implicite à l'équation (14.5) – *cf.* fiche 26). En remplaçant dans $c(q,\cdot)$, on obtient le coût de longue période $c_{LP}(q)$, qui est donc tel que :

$$c_{LP}(q) = c(q, k(q)).$$

Si on dérive les deux membres de cette égalité, on obtient (pour le membre de droite, on fait une *dérivée en chaîne* – *cf.* fiche 26) :

$$(14.6) \qquad c'_{LP}(q) = c'_q(q, k(q)) + c'_k(q, k(q)) \times k'(q).$$

Comme, par construction, $k(q)$ vérifie la condition du premier ordre (14.5), on a $c'_k(q, k(q)) = 0$, et par conséquent (14.6) se réduit à :

$$(14.7) \qquad c'_{LP}(q) = c'_q(q, k(q)).$$

Ce qui signifie que les courbes de courte période, $c(\cdot, k)$, sont tangentes à celle de longue période, $c_{LP}(\cdot)$, qui les « enveloppe » par en-dessous (on aurait d'ailleurs pu arriver directement à (14.5), en appliquant la formule du théorème de l'enveloppe – *cf.* fiche 26 –, où q joue le rôle du paramètre, et k celui de la variable).

APPLICATION

On considère la fonction :

$$c(q,k) = k + \frac{q}{2} + \frac{16}{k - q}.$$

Comme :

$$c'_k(q,k) = 1 - \frac{16}{(k-q)^2},$$

la condition d'optimalité (14.5) s'écrit ici :

$$1 - \frac{16}{(k-q)^2} = 0.$$

La capacité de production adaptée à la production q est donnée par la solution de cette équation ; soit :

$$k = q + 4.$$

En remplaçant k par cette expression dans $c(q,k)$, on obtient le coût de longue période :

$$\begin{aligned} c_{LP}(q) &= c(q,\ q + 4) \\ &= 3\,\frac{q}{2} + 8. \end{aligned}$$

Le graphe de $c_{LP}(\cdot)$ est donc une droite, qui « enveloppe » en-dessous les courbes de courte période (*cf.* figure 14.2).

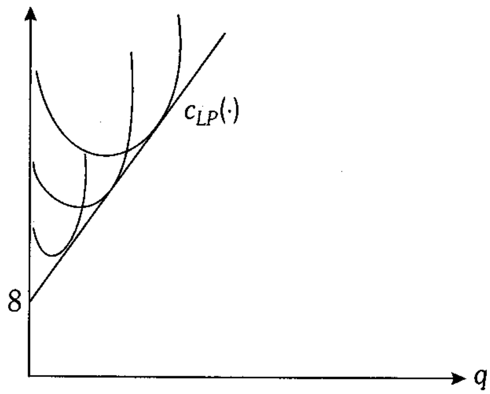

Figure 14.2

III Coût moyen, coût marginal de longue période

On définit le coût moyen de longue période comme on l'a fait pour le coût total, à partir de la capacité de production « adaptée » – qui minimise le coût moyen pour chaque niveau de production. Mais on peut aussi le définir à partir du coût total de longue période : c'est le rapport de celui-ci et de la quantité produite q (puisque, par définition, on a : coût moyen de longue période = $c_{LP}(q)/q$).

La courbe représentant le coût moyen de longue période « enveloppe » évidemment aussi par en-dessous les courbes de coût de courte période, pour les diverses capacités de production possibles.

Quant au coût marginal de courte période, il est donnée par la dérivée de la fonction de coût de longue période. Soit :

$$\text{coût marginal de longue période} = c'_{LP}(q).$$

Les courbes de coût moyen et de coût marginal de longue période se situent l'une par rapport à l'autre comme le font celles de courte période ; ainsi, si la première admet un minimum, alors la seconde passe par ce minimum.

15 L'équilibre partiel

Jusqu'à présent, on a considéré des individus – ménages ou entreprises – qui formulent des offres et des demandes *à prix donnés* (première hypothèse de la concurrence parfaite). Le problème qui se pose maintenant est celui de *l'équilibre,* c'est-à-dire celui de la *compatibilité* de ces offres et de ces demandes, dont on suppose qu'elles sont additionnées et confrontées globalement (deuxième hypothèse de la concurrence parfaite – *cf.* fiche 6). Si, pour chaque bien, il y a égalité de son offre et de sa demande globales, alors on dit qu'il y a *équilibre concurrentiel* (ou *de concurrence parfaite*). La première question qu'on se pose alors est celle de *l'existence* de prix ayant cette propriété. La réponse à cette question est loin d'aller de soi, notamment du fait que chaque offre et chaque demande dépend de *l'ensemble* des prix. C'est pourquoi on commence par considérer – dans ce qui veut être une approximation – que l'offre et la demande (globales) de chaque bien ne dépendent que de son seul prix, en adoptant une démarche dite d'*équilibre partiel,* dont on dit qu'elle suppose « toutes choses égales par ailleurs » (clause *ceteris paribus*).

I La question de l'existence de l'équilibre

L'approche par l'équilibre partiel consiste donc à supposer que les fonctions d'offre globale, $s(\cdot)$, et de demande globale, $d(\cdot)$, n'ont que le prix de ce bien (noté p) pour argument.

Par définition, un prix affiché p_e est d'équilibre s'il est solution de l'équation :

$$s(p) = d(p).$$

Pour s'assurer que cette équation a effectivement une solution, on suppose habituellement que la fonction de demande est strictement décroissante et que la fonction d'offre est croissante, comme dans la figure 15.1 ; le prix d'équilibre p_e est alors donné par l'intersection des courbes d'offre et de demande (q_e désignant la quantité offerte, et demandée, à ce prix).

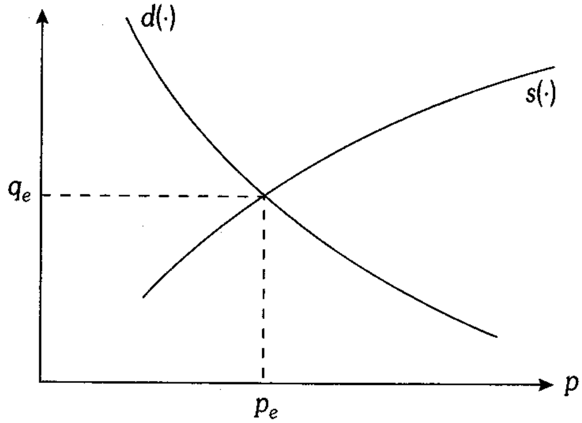

Figure 15.1

Il se peut toutefois que, même avec ces hypothèses, l'équilibre n'existe pas. Le problème se pose, par exemple, si on tient compte de la présence de *coûts fixes*. En effet, la courbe d'offre est alors *discontinue* (son graphe « fait des sauts »), comme cela est le cas dans la figure 15.2, où l'absence d'équilibre provient de ce que la courbe de demande passe dans la zone où la courbe d'offre fait un saut. Cette zone peut être importante si les coûts fixes le sont, mais elle peut l'être aussi s'il y a un grand nombre d'entreprises, même si chacune d'entre elles a des coûts fixes relativement faibles (car les discontinuités qu'ils provoquent *s'additionnent* lorsqu'on calcule l'offre globale).

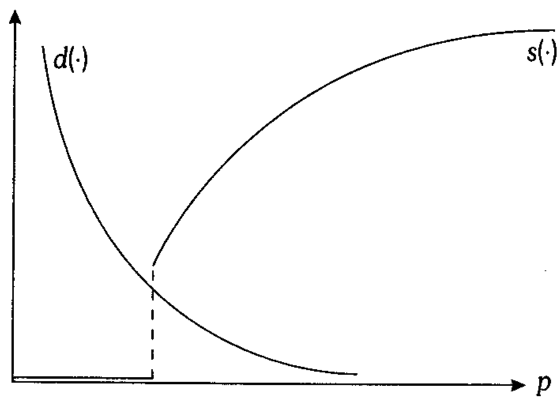

Figure 15.2

III La question de la stabilité : le tâtonnement walrasien

Lorsqu'un prix d'équilibre est affiché, les offres et les demandes sont (globalement) compatibles. On peut toutefois s'interroger sur la façon dont on peut parvenir à ce prix – par exemple, si celui qui affiche les prix ne connaît pas les *fonctions* d'offre et de demande individuelles – et donc, les courbes d'offre et de demande globales. On suppose habituellement qu'il existe un *processus*, le *tâtonnement walrasien*, qui, comme son nom l'indique, conduit à l'équilibre concurrentiel, par modifications successives des prix affichés, selon ce qu'on appelle dans le language courant « la loi de l'offre et de la demande ». Plus précisément, on suppose que, lorsque la demande globale d'un bien est supérieure à son offre globale, alors le prix affiché de ce bien est augmenté ; il est diminué dans le cas contraire. On suppose également qu'il n'y a pas d'échanges entre les agents tant que le prix d'équilibre n'est pas atteint (car sinon, les *fonctions* d'offre et de demande seraient modifiées en cours de processus).

Si on note p_t le prix du bien à l'instant t, alors le processus de tâtonnement qu'on vient d'évoquer est résumé par l'équation :

$$\text{signe de } (p_{t+1} - p_t) = \text{signe de } (d(p_t) - s(p_t))$$

(si à l'instant t, la demande est supérieure à l'offre – donc si $d(p_t) > s(p_t)$ –, alors le prix est augmenté – soit : $p_{t+1} > p_t$; les inégalités sont inversées lorsque la demande est inférieure à l'offre).

Un exemple de tâtonnement est donné par l'équation :

$$p_{t+1} - p_t = k(d(p_t) - s(p_t)), \qquad \text{avec } k > 0. \tag{15.1}$$

Pour un *prix initial* donné p_0, on peut donc déduire – en se servant de l'équation (de récurrence) (15.1) – le prix du bien à un instant t quelconque. La question qu'on se pose alors est celle de savoir si ce prix tend vers sa valeur d'équilibre. Si tel est le cas, quel que soit le prix initial p_0, on dit qu'il y a *stabilité globale* ; celle-ci n'est d'ailleurs nullement acquise, même si les courbes d'offre et de demande ont la forme qu'on leur suppose habituellement (croissante pour la première, décroissante pour la seconde).

Outre la forme d'organisation qu'il suppose, le tâtonnement pose un problème de cohérence interne : tout au long du processus, ménages et entreprises font des offres et des demandes en croyant qu'elles vont être satisfaites (hypothèse de concurrence parfaite – *cf.* fiche 6), alors que c'est le contraire qui se passe tant que l'équilibre n'est pas atteint ; un comportement rationnel voudrait que les agents tiennent compte de ce qu'ils observent, et modifient leur comportement en conséquent. Ce qu'ils ne font pas dans le cas du tâtonnement.

APPLICATION

On suppose que les fonctions d'offre et de demande, $s(\cdot)$ et $d(\cdot)$, sont des fonctions affines, de la forme :

$$s(p) = ap \qquad \text{et} \qquad d(p) = b - cp \qquad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$$

Le (seul) équilibre p_e est solution de l'équation $s(p) = d(p)$, qui s'écrit dans le cas présent :

$$ap = b - cp.$$

D'où :

$$p_e = \frac{b}{a + c}.$$

Le processus de tâtonnement (15.1) prend ici la forme :

$$p_{t+1} - p_t = k(b - cp_t - ap_t),$$

soit, en exprimant le prix en $t+1$ en fonction du prix en t :

(15.2) $$p_{t+1} = kb + (1 - kc - ka)p_t.$$

L'équilibre p_e vérifie, par définition, cette équation ; on a donc :

(15.3) $$p_e = kb + (1 - kc - ka)p_e.$$

En soustrayant membre à membre (15.3) à (15.2), on obtient :

$$p_{t+1} - p_e = (1 - kc - ka)(p_t - p_e).$$

La suite des écarts de prix $(p_t - p_e)$ est donc une *progression géométrique,* dont la raison est $1 - kc - ka$, qui converge (vers 0) si et seulement si :

$$-1 < 1 - kc - ka < 1.$$

La deuxième inégalité est toujours vérifiée (k, c et a étant, par hypothèse, strictement positifs). Reste la première inégalité, qui peut s'écrire :

$$k(c + a) < 2.$$

Ainsi, le tâtonnement est globalement stable si les valeurs absolues des pentes des courbes d'offre et de demande (a et c, respectivement) ne sont pas trop élevées, ou si la valeur donnée au coefficient k par celui qui met en œuvre le tâtonnement est (relativement) faible – mais plus k est faible, plus la convergence vers le prix d'équilibre est lente.

Le « cas limite » est celui où $k(c + a) = 2$ (ce qui arrive, par exemple, si $k = c = a = 1$) : le prix oscille alors indéfiniment autour du prix d'équilibre, avec une oscillation constante (l'amplitude de celle-ci est donnée par l'écart initial, $p_0 - p_e$).

Enfin, si $k(c + a) > 2$, le prix p_t s'éloigne de plus en plus, en oscillant, du prix d'équilibre p_e.

16 L'équilibre de longue période : libre entrée et cobweb

Par définition, un équilibre de longue période est une situation où « tous les ajustements possibles » ont eu lieu, l'idée étant que certains de ces ajustements prennent du temps, par opposition à l'équilibre « de courte période » – objet de la fiche 15 –, dont la réalisation serait instantanée (ou presque). L'équilibre de longue période apparaît donc comme l'aboutissement d'un processus, dont les éléments sont les équilibres de courte période. Parmi les ajustements qui prennent du temps, il y a l'adaptation des équipements, ou des capacités de production, à la quantité demandée : cette question a été traitée dans la fiche 14. Un autre type d'ajustement est celui qui est dû à l'irruption de nouvelles entreprises, attirées par l'existence de profits dans la production de certains biens. Pour qu'on puisse parler d'ajustement, on rajoute au modèle une hypothèse, dite *de la libre entrée*, selon laquelle le nombre d'entreprises qui produisent un bien n'est plus une donnée, mais une variable qu'il faut expliquer. Avec cette hypothèse, l'équilibre de longue période est, par définition, une situation où il n'y a ni candidat à l'« entrée », ni candidat à la « sortie » (le nombre d'entreprises ne varie plus).

Un autre type d'équilibre de longue période est celui qui apparaît dans le modèle dit « du *cobweb* » (« toile d'araignée », en anglais), où l'ajustement sur la longue période fait intervenir les anticipations des producteurs ; dans ce modèle, l'équilibre de longue période est, par définition, une situation où ces anticipations sont correctes (ou « parfaites »).

I Libre entrée et équilibre de longue période

L'équilibre (partiel) de concurrence parfaite, tel qu'il a été défini dans la fiche 15, suppose des courbes de demande et d'offre (globales) qui sont données, et donc un nombre de ménages et d'entreprises qui le sont également. Pourtant, et malgré cela, on inclut souvent dans les conditions de la concurrence parfaite une hypothèse dite « de libre entrée », l'idée étant que tout bien qui donne lieu à un profit strictement positif va attirer de nouvelles entreprises, qui vont donc se lancer dans la production de ce bien (« ils entrent dans son marché »).

L'idée est simple, mais si on essaie de lui donner un contenu précis, de nombreux problèmes surgissent. En effet, en concurrence parfaite, le profit d'équilibre n'est strictement positif que si les rendements d'échelle sont décroissants (*cf.* fiche 12). Or, si on ne suppose pas que le nombre d'entreprises est fixé, alors celles-ci ont intérêt à se diviser en unités de production de plus en plus petites, dans un processus – théoriquement – sans fin (puisque plus ces unités de production sont petites, et plus leur rendement est élevé). À la limite, et suite à la « libre entrée », on se trouverait en présence d'une infinité d'entreprises (ou, du moins, chaque entreprise se confondrait avec un ménage : rien ne distinguerait plus ces deux types d'agent).

La solution habituellement retenue pour éviter le problème posé par la coexistence des rendements d'échelle décroissants et de la libre entrée, consiste à supposer l'existence de *seuils de production et de prix*, en-dessous desquels la production n'est pas rentable. Ces seuils sont dus, pour l'essentiel, aux *coûts fixes* (*cf.* fiche 13) ; ils ont pour conséquence que les courbes d'offre sont *discontinues* (« elles font des sauts » à certains prix), comme cela est le cas pour la courbe tracée dans la figure 16.1. L'introduction de seuils met cependant en cause l'existence même de l'équilibre de longue période.

En effet, supposons que la courbe de demande d'un bien coupe sa courbe d'offre « au-dessus de la discontinuité ». Il existe alors un équilibre « de courte période » (le point (p_e, q_e) de la figure 16.1*a*). Comme le prix d'équilibre p_e est alors *strictement supérieur* au seuil de rentabilité $p°$, les entreprises qui produisent le bien font un profit strictement positif ; d'autres entreprises vont donc se lancer dans la production du bien (comme le postule l'hypothèse de libre entrée). La fonction d'offre va alors être décalée vers le haut (on suppose, pour simplifier la présentation, que toutes les entreprises ont la même fonction de coût). Toutefois, ce décalage se fait « par sauts », car chaque entreprise qui entre doit écouler une certaine quantité de produit pour amortir ses coûts fixes ; il arrive donc un moment où le nombre d'entreprises qui sont « entrées » est tel que la courbe d'offre se trouve *au-dessus* de la courbe de demande (cas décrit dans la figure 16.1*b*). La production se fait alors à perte, *pour toutes les entreprises*. Celles-ci – ou, du moins, certaines d'entre elles – vont donc « sortir » (abandonner la production du bien), et provoquer l'effondrement de l'offre. Du coup, la courbe d'offre va s'affaisser et couper à nouveau la courbe de demande ; ce qui rendra la production profitable pour les entreprises qui se lancent à nouveau dans la production de bien (ou qui ne l'ont pas abandonnée). Mais alors, il y aura de nouvelles « entrées », et le processus recommence, indéfiniment.

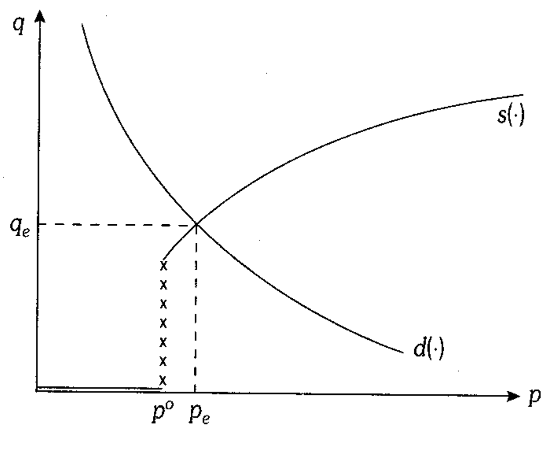

Figure 16.1*a*

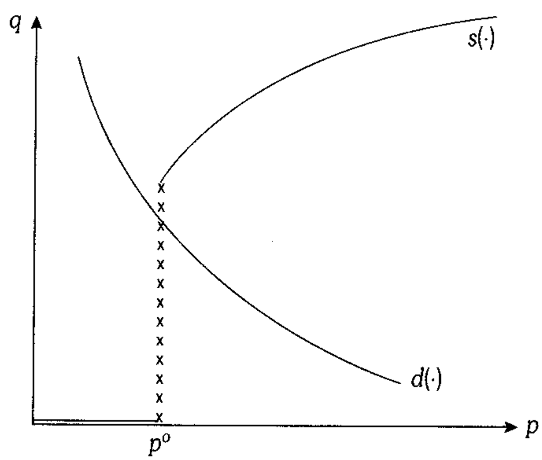

Figure 16.1*b*

Ainsi, en dehors du cas tout à fait exceptionnel (et pratiquement impossible) où la courbe de demande « passe juste » par l'un des points de discontinuité (ces points sont désignés par une croix dans la figure 16.1), le système est *totalement instable* : l'hypothèse de libre entrée a pour conséquence d'incessantes « entrées » et « sorties » d'entreprises. Il ne peut jamais se stabiliser, puisqu'il n'a pas de « point de repos » (d'équilibre de longue période).

Deux types de solution, insatisfaisantes, ont été proposées pour résoudre le problème de l'instabilité foncière de la libre entrée en concurrence parfaite :

- *soit on suppose que la courbe d'offre est continue, sa partie en pointillés étant remplacée par un segment de droite* (le prix d'équilibre avec libre entrée est alors égal au seuil $p°$) ; ce qui n'est possible que s'il y a une infinité d'entreprises (plus précisément, un *continuum*), chacune ayant un seuil de production « infiniment petit » (le seuil de production q^0 devient négligeable). Adopter cette solution, dont peut se satisfaire le mathématicien, remet à l'ordre du jour la question du statut des entreprises, en tant qu'entités différentes des ménages (question qu'on avait voulu éviter au départ) ;
- *soit on suppose que le profit d'équilibre est nul, quel que soit le nombre d'entreprises* ; tel est le cas si *les rendements d'échelle sont constants* (et les coûts fixes nuls). Le prix d'équilibre concurrentiel est alors égal au coût unitaire de production – qui est constant, puisque les rendements d'échelle sont constants – de l'entreprise pour laquelle ce coût est le plus faible. Dans ce cas, une seule entreprise suffit à assurer la production : les autres ne sont pas incitées à entrer, puisque le profit est nul. L'idée consistant à associer la libre entrée à la multiplicité des entreprises tombe à l'eau. Les rendements d'échelle constants posent en fait un problème insoluble en concurrence parfaite : la connaissance du prix d'équilibre par l'entreprise ne suffit pas pour qu'elle puisse déterminer *la quantité qu'elle doit offrir* pour satisfaire la demande. Ce qui va à l'encontre d'une des hypothèses centrales de la concurrence parfaite, selon laquelle les agents prennent leurs décisions sur la base de la seule information donnée par les prix.

APPLICATION

Supposons que la fonction de demande $d(\cdot)$ d'un bien soit telle que :

$$d(p) = \frac{40}{p},$$

sa fonction d'offre $s(\cdot)$ étant :

- $s(p) = 0$ si $0 < p < 3$
- $s(p) = \sqrt{p-2}$ si $p \geqslant 3$.

Le seuil de prix $p°$ est donc égal à 3, celui des quantités étant égal à 1 (= $s(3)$). Au prix $p°$, la demande est égale à $40/3 = 13{,}33\ldots$ Si treize entreprises « entrent », alors il y a un équilibre où chaque entreprise produit une quantité (légèrement) supérieure au seuil de production ($q° = 1$), à un prix (légèrement) supérieur au seuil $p° = 3$. Comme ces entreprises font donc un profit strictement positif, l'hypothèse de libre entrée implique que d'autres entreprises vont se lancer dans la production du bien ; mais il suffit alors qu'une seule le fasse, et qu'il y ait donc quatorze offreurs, pour que la demande (13,33...) au prix minimum ($p° = 3$) ne permette pas d'absorber l'offre minimale totale (celle qui permet aux entreprises d'amortir les coûts fixes), qui est égale à 14 × 1 = 14. Les entreprises produisent donc à perte, et certaines (si ce n'est toutes) « sortent ». L'équilibre de longue période n'existe pas, puisque le nombre d'entreprises ne peut qu'être entier.

III Décalage entre production et vente : le modèle du cobweb

Ce modèle considère une succession d'équilibres (partiels), « de courte période », avec un décalage entre le moment où la décision de produire est prise et celui où la production qui en résulte est disponible. Les offres s'appuient sur des *anticipations statiques* (les producteurs pensent que le prix du bien ne varie pas entre le moment où la décision de le produire est prise et celui où la production est disponible). Comme, en outre (par hypothèse), il y a équilibre à chaque période, le prix du bien est supposé s'ajuster de façon que sa demande soit, en permanence, égale à son offre.

Si on note $s(.)$ et $d(.)$ les fonctions d'offre et de demande, et p_t le prix du bien en t, alors les hypothèses précédentes conduisent à l'équation :

$$s(p_{t-1}) = d(p_t).$$

On est en présence d'une relation de récurrence, le prix à l'instant t dépendant du prix à l'instant $t-1$ (ainsi, évidemment, que de la forme des fonctions d'offre et de demande). Tant que p_t est différent de p_{t-1}, le choix des producteurs est fait sur la base d'*anticipations erronées* (puisqu'ils croient, en $t-1$, que le prix en t sera le même qu'en $t-1$). En revanche, leurs anticipations sont justes, ou correctes, si on a, à tout instant, $p_t = p_{t-1}$. Dans ce cas, il y a équilibre de longue période : les producteurs ne modifiant pas leurs anticipations, leur production et le prix demeurent constants. Un prix d'équilibre de longue période est donc solution de l'équation :

$$s(p) = d(p).$$

Si ce prix existe, la question qui se pose alors est celle de sa stabilité, c'est-à-dire celle de la convergence de la suite de prix d'équilibre, (p_t). La réponse à cette question dépend de la forme des fonctions $s(\cdot)$ et $d(\cdot)$.

APPLICATION

Supposons que les fonctions d'offre, $s(\cdot)$, et de demande, $d(\cdot)$, sont affines, de la forme :

$$s(p) = ap \quad \text{et} \quad d(p) = b - cp, \text{ avec } a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Le prix d'équilibre de longue période est donc solution de l'équation :

$$ap = b - cp.$$

Il est unique et égal à :

$$\frac{b}{a+c}.$$

L'équation de récurrence, $s(p_{t-1}) = d(p_t)$, qui caractérise le modèle s'écrit dans le cas présent :

$$ap_{t-1} = b - cp_t,$$

ou, de façon équivalente :

(16.1)
$$p_t = \frac{b - ap_{t-1}}{c}.$$

Si on note p_E le prix d'équilibre de longue période, alors il vérifie, par définition, l'équation (16.1) ; soit :

(16.2)
$$p_E = \frac{b - ap_E}{c}.$$

En soustrayant (16.2) à (16.1), il vient :

$$p_t - p_E = -\frac{a}{c}\,(p_{t-1} - p_E).$$

La suite d'écarts à l'équilibre de longue période, $(p_t - p_E)$, est une progression géométrique de raison $-a/c$. Elle converge – il y a stabilité sur la longue période – si et seulement si $|a/c| < 1$, donc si et seulement si la valeur absolue c de la pente de la fonction de demande est strictement supérieure à celle de la fonction d'offre.

La figure 16.2 décrit la situation dans le cas où $a = 1$, $b = 12$ et $c = 1{,}2$. Comme $a/c < 1$, il y a convergence vers l'équilibre de longue période. Les traits en pointillés donnent une idée de la façon dont la convergence se fait (d'où la référence à la « toile d'araignée ») pour un prix initial p_0 quelconque (mais compris entre 0 et 10).

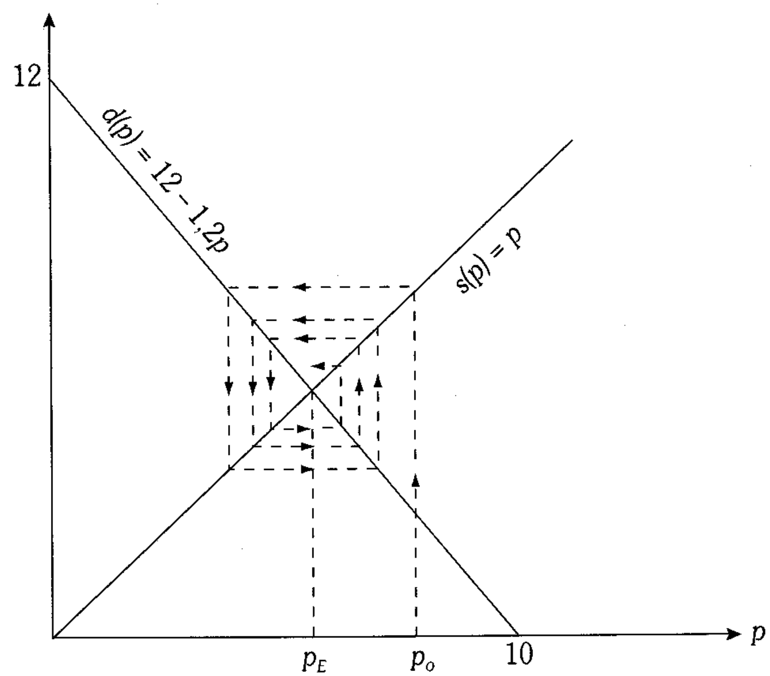

Figure 16.2

17 Demande et offre de travail

Pour le microéconomiste, le travail est un bien (ou, plutôt, un service) comme un autre. Il mérite toutefois un traitement particulier, en raison de la place qu'il occupe dans le revenu des ménages qui sont pratiquement tous offreurs de travail. C'est d'ailleurs cette particularité qui est à l'origine de concepts spécifiques, tel le salaire de réserve.

I La demande de travail par l'entreprise

Pour l'entreprise en concurrence parfaite, le travail est un input comme un autre, dont le prix a un nom particulier : le *salaire*. Pour tout salaire affiché, elle demande une quantité de travail telle que son produit marginal soit égal à ce salaire (en supposant, comme cela est usuel, que les productivités marginales sont bien définies et décroissantes). Ce qu'on peut écrire, si on note $f(\cdot)$ la fonction de production de l'entreprise, L la quantité de travail, s le salaire et p le prix du bien produit :

$$pf'_L(L, \cdot) = s,$$

le point dans $(L, \cdot)$ désignant les autres inputs que le travail. Parmi ces derniers, on peut d'ailleurs envisager des types de travail différents (par exemple, plus ou moins qualifiés), ayant des salaires affichés spécifiques.

APPLICATION

Situons-nous dans le cas le plus simple, mais relativement fréquent, où le travail est le seul input de la fonction de production $f(\cdot)$. Si celle-ci est donnée par la formule $f(L) = L^\alpha$, alors la condition du premier ordre : produit marginal = salaire ($pf'(L) = s$), *cf.* fiche 12, s'écrit ici :

$$\alpha p L^{\alpha-1} = s.$$

Si on suppose que α est strictement compris entre 0 et 1, ce qui implique que le produit marginal est décroissant, alors on déduit de cette égalité la demande de travail $d(\cdot)$, qui est telle que :

$$d\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{s}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Le rapport s/p est généralement appelé *salaire réel* (c'est le pouvoir d'achat du salaire en bien produit par l'entreprise).

III L'offre de travail : une demande de loisir

Si on se place du côté du consommateur, le travail se distingue des autres biens dans la mesure où il est une source de *désutilité*. Afin de se ramener au cas usuel – où les biens procurent de la satisfaction –, le microéconomiste introduit la notion de *loisir*, en s'appuyant sur le fait que le temps disponible T est limité. Offrir une quantité L de travail revient alors à « demander » une quantité $T - L$ de loisir. Si on désigne cette quantité par le symbole ℓ, alors on a :

$$\ell + L = T.$$

Si on considère que le ménage est demandeur de loisir, source d'utilité comme les autres biens, sa relation de préférence porte alors sur des paniers « loisir-biens ». On suppose généralement qu'elle est monotone (courbes d'indifférence décroissantes) et convexe, et qu'on peut la représenter par une fonction d'utilité $U(\cdot)$, qui associe au panier (ℓ, q) – où q est la quantité d'un bien (supposé unique, pour simplifier la présentation) – le nombre $U(\ell, q)$.

Pour déterminer le choix du consommateur, il reste à préciser la forme de sa contrainte budgétaire. Il n'est plus possible de supposer, comme cela a été fait jusqu'à présent, que le revenu est un paramètre, une donnée, indépendant des prix et du choix de l'individu. En effet, si celui-ci offre une quantité L de travail, alors il en attend un revenu sL, qui dépend à la fois du taux de salaire s et de son offre de travail L. Si le ménage n'a pas d'autre ressource que celle que lui procure la vente de son travail, alors sa contrainte budgétaire s'écrit :

$$pq = sL,$$

où p est le prix du bien de consommation. Comme le temps de travail est lié au temps de loisir par la relation $L + \ell = T$ – ou, ce qui est équivalent, $L = T - \ell$ –, cette contrainte peut s'écrire : $pq = s(T - \ell)$, ou encore :

$$s\ell + pq = sT.$$

On retrouve, aux notations près, la forme habituelle de la contrainte budgétaire du consommateur, le revenu étant ici donné par la valeur sT de son temps disponible [le vecteur-prix étant (s, p), celui des demandes de loisir et de bien, (ℓ, q)]. Avec ce revenu, le consommateur peut acheter du bien, au prix p, et du temps de loisir, au prix s (une heure de loisir coûte ce qu'elle aurait pu rapporter si elle avait été consacrée au travail).

Si on suppose que le consommateur dispose d'autres ressources, qui prennent ici la forme d'une quantité $q°$ du bien, alors son revenu est $sT + pq°$, la contrainte budgétaire s'écrivant :

$$s\ell + pq = sT + pq°.$$

Le choix du consommateur porte sur le panier loisir-bien (ℓ^*, q^*) qui, sous les hypothèses usuelles (courbes d'indifférence de type hyperbolique), égalise le taux marginal de substitution entre loisir et bien au rapport de leurs prix (ici, le salaire réel s/p), tout en vérifiant la contrainte budgétaire. C'est la situation décrite dans la figure 17.1*a*.

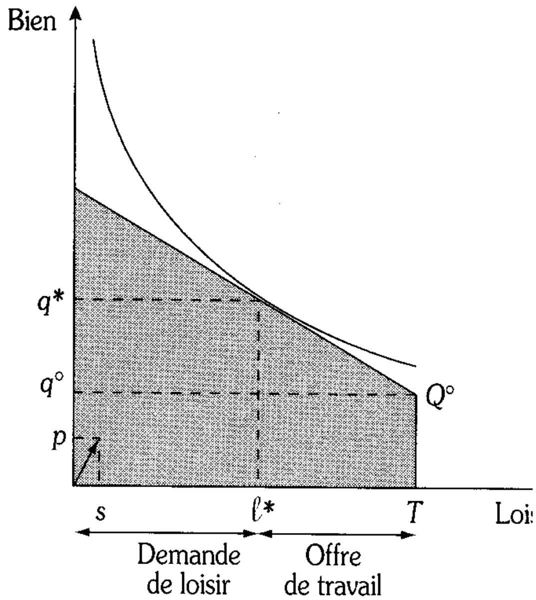

Figure 17.1*a*

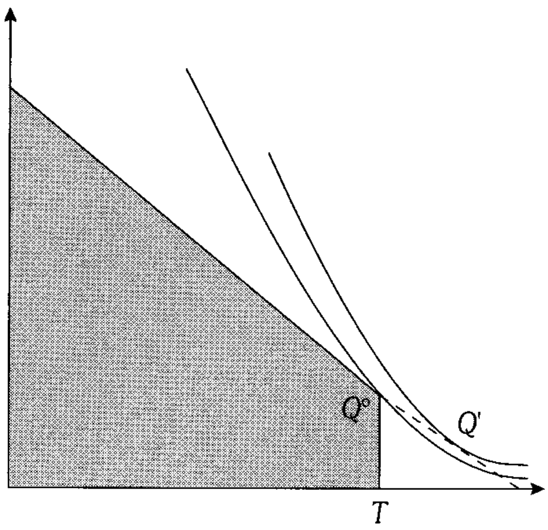

Figure 17.1*b*

III Le salaire de réserve

La figure 17.1*a* présente une légère différence avec celle qui a été utilisée, dans la fiche 7, pour décrire le choix du consommateur entre deux biens quelconques : le domaine de consommation y est « tronqué », la quantité de loisir ne pouvant être supérieure au temps disponible T (graphiquement, il manque la partie du triangle des consommations possibles à droite du segment de droite $TQ°$). Ainsi, même si on est dans le cas usuel (courbes d'indifférence de type hyperbolique), il se peut que le choix du consommateur soit une *solution en coin* (*cf.* fiche 8), avec une offre nulle de travail, pour certains couples prix-salaire. La figure 17.1*b* présente une situation de ce type, où le consommateur se contente de consommer sa dotation initiale en bien, en consacrant tout son temps disponible au loisir (si cela était possible, il serait même disposé à vendre une partie des biens qu'il détient contre du temps en plus, pour se situer au point Q' du graphique ; le rêve de Faust...).

Parmi tous les couples prix-salaire possibles, il se peut donc qu'il y en ait un qui corresponde au cas limite, celui qui sépare les situations décrites dans les figures 17.1*a* et 17.1*b* ; dans ce cas, la courbe d'indifférence passant par $Q° = (T, q°)$ y est tangente à la droite de budget. Autrement dit, le taux marginal de substitution entre bien et loisir y est égal au rapport salaire-prix (le salaire réel). Ce dernier est appelé, dans ce cas, *salaire de réserve*, car le consommateur se « réserve » d'offrir du travail pour tout salaire réel inférieur (ce terme vient des ventes aux enchères, où le prix de réserve est le prix en-dessous duquel le vendeur refuse la transaction). On a donc :

$$\textit{salaire (réel) de réserve} = \text{TMS}_{\text{loisir/bien}}(T, q°).$$

On notera que plus le consommateur détient de ressources en biens (plus le point $Q°$ a une ordonnée élevée), et plus le salaire de réserve est élevé.

APPLICATIONS

1. Supposons que la relation de préférence du consommateur est représentée par la fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par :

$$U(\ell, q) = \ell q,$$

que le temps disponible est T, que le salaire est $s = 2$ et que le prix du bien est $p = 1$ (le bien sert de numéraire).

Si le consommateur n'a que son temps disponible pour ressource, son revenu (ou sa richesse) est égal à $2T$. De l'égalité entre taux marginal de substitution et rapport de prix ($q/\ell = 2$) et de la contrainte budgétaire ($q + 2\ell = 2T$), on déduit sa demande de loisir : $T/2$. Son offre de travail est donc : $T - T/2 = T/2$. On remarque qu'elle est indépendante du salaire. Il y a donc compensation exacte entre effet-substitution (quand le salaire augmente, on travaille plus) et effet-revenu (quand le salaire augmente, on est plus riche, et on préfère consacrer plus de temps au loisir). Une conséquence de cela est qu'il n'existe pas dans ce cas de salaire de réserve : quel que soit le couple prix-salaire affiché, le consommateur consacre la moitié de son temps à travailler.

Le résultat précédent vaut pour n'importe qu'elle fonction d'utilité de la forme $U(\ell, q) = \ell^{\alpha} q^{\beta}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la part ~~du temps~~ consacré au travail étant alors égale à $\beta/(\alpha + \beta)$.

2. On garde la même fonction d'utilité que dans l'exemple précédent, mais on suppose que le consommateur dispose, outre son temps disponible T, d'une dotation initiale en bien, $q°$. Au prix $p = 1$ et au salaire s, son revenu est alors égal à $sT + q°$. Comme sa demande de loisir est égale à $R/2s$ (*cf.* fiche 7, la fonction d'utilité étant ici une Cobb-Douglas avec $\alpha = \beta = 1$), donc à $(sT + q°)/2s$, son offre de travail est :

$$T - \frac{sT + q°}{2s} = \frac{sT - q°}{2s}.$$

L'offre de travail diminue donc lorsque s diminue et s'annule pour $s = q°/T$. On a donc :

$$\textit{salaire de réserve} = \frac{q°}{T}.$$

Le salaire de réserve est d'autant plus élevé que le consommateur dispose d'une dotation initiale en bien importante. On vérifie immédiatement qu'il est égal au taux marginal de substitution loisir-bien en $(T, q°)$.

18 Le choix intertemporel

Dans la fiche 1, il a été précisé qu'en microéconomie, un bien est caractérisé par ses propriétés « physiques » (qui sont, par exemple, source d'utilité) ainsi que par son lieu et sa date de disponibilité. Jusqu'à présent, ces trois aspects n'ont pas été distingués, même si les illustrations utilisées évoquaient exclusivement les propriétés physiques des biens. L'approche intertemporelle met, elle, l'accent sur le caractère daté des biens en concurrence parfaite. Dans ce cadre, la prise en compte explicite de la date de disponibilité des biens ne modifie pas, en réalité, l'analyse des choix du consommateur et du producteur. Seule la façon de la présenter change, l'adjectif « intertemporel » étant accolé à la plupart des concepts utilisés jusqu'à présent, tandis que la notion de taux d'intérêt est introduite à partir de celle de prix relatif (intertemporel).

I Une hypothèse essentielle : l'existence d'un système complet de marchés

L'approche intertemporelle s'appuie de façon essentielle sur une des hypothèses centrales de la concurrence parfaite : l'existence d'un « système complet de marchés » (*cf.* fiche 6). Ce qui signifie qu'il existe un prix affiché, et connu de tous, pour chaque bien, présent et futur, de l'économie. La prise en compte des biens futurs est essentielle, puisque tout individu qui pense vivre plus d'une période inclut dans son choix ce type de biens. Les fonctions d'utilité et de production où ils interviennent sont qualifiées d'*intertemporelles*, les plans des agents portant sur des paniers de biens de la forme $(q_{10}, \ldots, q_{n0}, \ldots, q_{1t}, \ldots, q_{nt}, \ldots, q_{1T}, \ldots, q_{nT})$, où q_{it} désigne une quantité du bien de type i disponible à l'instant t, T étant la « durée de vie » de l'économie (ou de l'agent concerné).

Dans un système complet de marchés, où les prix de tous les biens présents et futurs sont affichés à l'instant initial, on note p_{it} le prix du bien de type i disponible à l'instant t, mais *payé à l'instant initial*. Car c'est à cet instant que les agents décident – à partir de leurs fonctions d'utilité ou de production intertemporelles – de leurs consommations et productions présentes et futures. Ce choix peut être caractérisé sans ambiguïté, du fait de *l'absence d'incertitude* sur le futur, conséquence de l'hypothèse sur l'existence d'un système complet de marchés.

Ainsi, les ménages peuvent évaluer, aux prix affichés, leur *revenu intertemporel* (qui représente ce qu'on appelle habituellement leur *richesse*) à partir de leur dotation initiale, en biens présents et futurs. Si on abstrait les profits des entreprises dont les ménages sont actionnaires, ce revenu est donné par :

$$\sum_{t=0}^{t=T}\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{it}^{\circ},$$

où q_{it}° désigne sa dotation initiale en bien de type i disponible à l'instant t (comme il n'y a pas d'incertitude, elle est donc connue dès l'instant initial).

La contrainte budgétaire, intertemporelle, s'écrit :

$$\sum_{t=0}^{t=T}\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{it}^{\circ} = \sum_{t=0}^{t=T}\sum_{i=1}^{i=n} p_{it}q_{it}.$$

De même pour le profit intertemporel des entreprises.

En fait, on se ramène au cas usuel en remarquant qu'on est en présence de nT biens, chacun étant désigné par un couple d'indices de la forme it. Ainsi, le consommateur égalise son taux marginal de substitution au rapport des prix (l'un et l'autre pouvant être intertemporels, si les biens concernés ne sont pas disponibles à la même date), le producteur en faisant de même en égalisant le produit marginal de chaque input au prix de celui-ci, toujours dans une perspective intertemporelle.

II Les taux d'intérêt spécifiques

Les choix intertemporels, comme tous les choix en concurrence parfaite, sont faits sur la base des *prix relatifs* des divers biens. Avec un système complet de marchés, ceux-ci sont de la forme $p_{it}/p_{jt'}$ ou, si on s'en tient au seul bien j, quel qu'il soit : $p_{jt}/p_{jt'}$. Si t' est supérieur à t, alors on considère habituellement que le prix d'un bien disponible en t est supérieur au prix du même bien disponible « plus tard », en t', et donc que $p_{jt}/p_{jt'} > 1$. Le gain dû à « l'attente », $p_{jt}/p_{jt'} - 1$, est appelé *taux d'intérêt spécifique au bien j, entre t et t'*; on le note $i_{jt,t'}$. Il résulte de cette définition que :

$$\frac{p_{jt}}{p_{jt'}} = 1 + i_{jt,t'}.$$

En fait, si on connaît les taux d'intérêt entre périodes successives, alors on peut connaître le taux d'intérêt entre n'importe quelles périodes. Ainsi, si on considère la période allant de 0 à t, on a (on abandonne l'indice j pour alléger la présentation) :

$$\frac{p_t}{p_0} = \frac{p_t}{p_{t-1}}\frac{p_{t-1}}{p_{t-2}}\cdots\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_0},$$

et donc, en se servant de la formule qui a servi à définir les taux d'intérêt à partir des prix relatifs :

$$1 + i_{t,0} = (1 + i_{t,t-1})(1 + i_{t-1,t-2})\dots(1 + i_{1,0}).$$

Dans le cas (très) particulier où le taux d'intérêt est constant d'une période à l'autre, on peut le noter i, et on a $1 + i_{t,0} = (1 + i)^t$.

On établit des formules similaires, et de la même façon, dans le cas général.

Entre deux périodes données, il y a donc autant de taux d'intérêt spécifiques que de biens. On peut toutefois privilégier un quelconque de ces biens, et utiliser son taux d'intérêt spécifique comme référence. Supposons que c'est le bien 1. À chaque période, on évalue – grâce aux prix relatifs – les paniers de biens en « bien 1 disponible à cette période », puis on se sert des taux d'intérêt spécifiques du bien 1, entre les diverses périodes. Le bien 1, disponible à l'instant 0, sert alors de *numéraire* (on pose $p_{10} = 1$). Compte tenu de cela, on raisonne habituellement sur un seul bien, et sur ses taux d'intérêt spécifiques.

III La valeur actuelle

La formule qui définit le taux d'intérêt spécifique d'un bien peut s'écrire, entre l'instant initial 0 et l'instant t, si on omet – pour simplifier les notations – l'indice caractérisant le bien :

$$p_t = \frac{p_0}{1 + i_t}.$$

(Lorsqu'on utilise la notation i_t, on signifie par là que c'est l'intérêt entre 0 et t.) Si $i_t > 0$, ce qu'on suppose habituellement, la formule précédente signifie qu'un bien disponible à l'instant t, mais payé à l'instant initial, a un prix plus faible que le même bien disponible immédiatement (en 0). Le rapport $p_0/(1 + i_t)$ est la *valeur actuelle* d'une unité du bien disponible en t ; lorsqu'on se situe dans une perspective d'actualisation (« évaluer le futur en le ramenant au présent »), on appelle le taux i_t *taux d'actualisation* et le coefficient multiplicateur $1/(1 + i_t)$ *facteur d'escompte*. Si on s'intéresse à la valeur actuelle d'un panier de biens disponible à l'instant t, et si on connaît les prix relatifs (au bien de référence, les carottes, par exemple, lui aussi disponible en t) des biens composant le panier, alors on peut évaluer ce panier en bien de référence (en « équivalent carottes », par exemple). Si p_{jt} est le prix relatif (aux carottes disponibles en t) d'une unité du bien j disponible en t, et si q_{jt} est la quantité de ce bien dans le panier, alors la valeur en équivalent carottes disponibles en t de celui-ci est donnée par :

$$R_t = \sum_j p_{jt} q_{jt},$$

sa valeur actuelle (en carottes disponibles en 0) étant :

$$\frac{R_t}{1 + i_t},$$

où i_t est le taux d'actualisation des carottes entre 0 et t.

De même, la valeur actuelle (en carottes disponibles en 0) d'un ensemble de paniers de biens disponibles entre 0 et la date finale T est donnée par une expression de la forme :

$$R_0 + \frac{R_1}{1 + i_1} + \ldots + \frac{R_T}{1 + i_T},$$

où R_t est la valeur (en carottes disponibles en t) du panier de biens de la période t.

Si le taux d'intérêt spécifique des carottes est le même d'une période à l'autre, donc si $1 + i_t = (1 + i)^t$, cette expression s'écrit :

$$R_0 + \frac{R_1}{1 + i} + \ldots + \frac{R_T}{(1 + i)^T}.$$

IV Le choix intertemporel du consommateur

On se situe dans le « cas minimal », celui où il n'y a qu'un bien, disponible à deux périodes différentes (0 et 1). À la consommation (c_0, c_1) correspond l'utilité intertemporelle $U(c_0, c_1)$; si la dotation initiale du consommateur est (w_0, w_1), sa contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit :

$$p_0 c_0 + p_1 c_1 = p_0 w_0 + p_1 w_1,$$

ou, encore, en se servant de la formule qui définit le taux d'intérêt spécifique du bien entre 0 et 1 $[p_1 = p_0/(1 + i)]$:

$$c_0 + \frac{c_1}{1 + i} = w_0 + \frac{w_1}{1 + i},$$

après avoir posé $p_0 = 1$ (le bien disponible en 0 sert de numéraire). La somme $w_0 + w_1/(1 + i)$ représente la *richesse* du consommateur, évaluée en numéraire. Si les préférences intertemporelles du consommateur sont convexes, son choix est tel qu'il égalise son taux marginal de substitution au rapport des prix, qui est ici égal à $1 + i$. La figure 18.1 donne un exemple d'un tel choix.

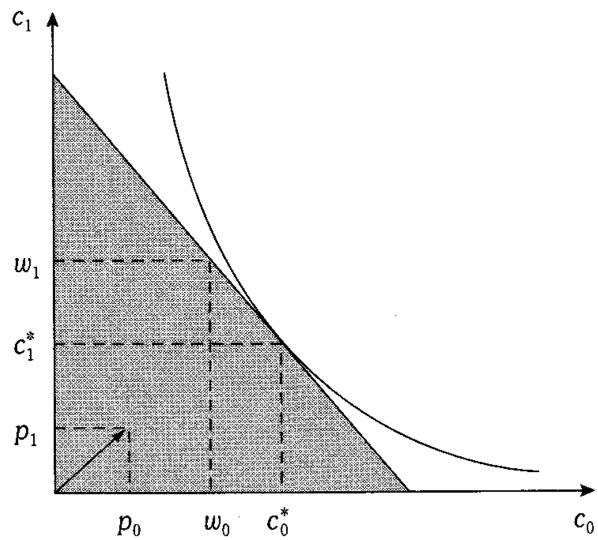

Figure 18.1

On remarque que dans cet exemple, le consommateur vend $w_1 - c_1^*$ du bien futur (plus important dans sa dotation initiale) contre $c_0^* - w_0$ du bien présent.

APPLICATION

Supposons que la fonction d'utilité intertemporelle du consommateur $U(\cdot)$ est :

$$U(c_0, c_1) = c_0 \cdot c_1^{1/2},$$

que sa dotation initiale est (8,3), que le taux d'intérêt entre 0 et 1 est égal à 10 % (= 0,1), le prix du – seul – bien à l'instant 0 servant de numéraire.

La richesse R du consommateur, en numéraire, est donc :

$$R = 8 + \frac{3}{1 + 0{,}1}.$$

Comme on est en présence d'une fonction d'utilité de Cobb-Douglas, on est dans le cas usuel où s'applique la règle d'égalité entre le $\text{TMS}_{1/0}$ et le rapport des prix p_0/p_1 (= 1 + 0,1). Comme, ici, $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, il vient (*cf.* fiche 7) :

demande du bien disponible en 0 : $\dfrac{2R}{3p_0} = 7{,}53$

demande du bien disponible en 1 : $\dfrac{R}{3p_1} = 3{,}42.$

À la différence du cas décrit dans la figure 18.1, le consommateur offre du bien présent (dont il est relativement plus doté) contre du bien futur : 0,47 (= 8 – 7,53) de bien présent contre 0,42 (= 3,42 – 3) de bien futur.

19 L'équilibre général

Contrairement à l'approche par l'équilibre partiel, l'approche par l'équilibre général ne suppose pas des offres et des demandes données ; elle prend pour point de départ de l'analyse les unités de base de l'économie que sont les ménages et les entreprises, puis elle cherche à déduire leurs offres et leurs demandes à partir de leurs caractéristiques (goûts, croyances, techniques disponibles) et du cadre institutionnel retenu. Ce dernier est toujours, sauf précision contraire, celui de la concurrence parfaite (*cf.* fiche 6).

Dans ce cadre, les inconnues (ou « variables endogènes ») du modèle sont les prix d'équilibre (qui égalisent les offres et les demandes globales), mais aussi les revenus et les quantités d'équilibre, qui dépendent de ces prix. Les données (ou « variables exogènes ») du modèle sont les relations de préférence et les dotations initiales des ménages, et les ensembles de production des entreprises (dont les ménages sont les propriétaires).

Cette fiche va traiter du cas des économies d'échange, sans production, le cas général (avec production) faisant l'objet de la fiche suivante.

I Au cœur du modèle : les demandes nettes

En concurrence parfaite, l'ordinateur central (ou le commissaire-priseur) affiche un vecteur-prix P et confronte les offres et les demandes que lui transmettent les agents, à ces prix. Si on note $d_{ij}(P)$ et $s_{ij}(P)$ la demande et l'offre du bien i par l'agent j aux prix $P = (p_1, \ldots, p_n)$, la première question qui se pose à propos de l'équilibre général est celle de l'existence d'un vecteur-prix *d'équilibre*, c'est-à-dire d'un vecteur-prix $P_e = (p_{e1}, \ldots, p_{en})$ tel que l'on ait :

$$\sum_{j=1}^{j=m} d_{ij}(P_e) = \sum_{j=1}^{j=m} s_{ij}(P_e), \qquad \text{pour } i = 1, \ldots n,$$

ou, ce qui est équivalent, tel que :

$$\sum_{j=1}^{j=m} d_{ij}(P_e) - \sum_{j=1}^{j=m} s_{ij}(P_e) = 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots n.$$

La différence $d(\cdot) - s(\cdot)$ entre la demande et l'offre est appelée *demande nette* (ou *excès de demande*) ; on la note $e(\cdot)$. Un vecteur-prix est donc d'équilibre (général) si, et seulement si, il annule la demande nette de chaque bien.

Les demandes nettes jouent un rôle essentiel dans l'approche par l'équilibre général. Elles ont deux propriétés qui sont toujours vérifiées et qui découlent, l'une de la rationalité des agents, l'autre de la façon dont elles sont définies.

A. Les demandes nettes ne sont fonction que des seuls prix relatifs (elles sont homogènes de degré 0)

Cette propriété découle du fait que si *tous les prix* sont multipliés par une même constante (positive), alors les choix des agents ne sont pas modifiés (les coûts, mais aussi les revenus, étant multipliés par cette constante). Ce qui s'écrit, si $e(\cdot)$ est la demande nette d'un bien quelconque :

$$e(p_1, \ldots, p_n) = e(kp_1, \ldots, kp_n), \qquad \text{avec } k > 0.$$

Si, par exemple, $p_1 \neq 0$, alors en posant $k = 1/p_1$, il vient :

$$e(p_1, \ldots, p_n) = e(1, p_2/p_1, \ldots, p_n/p_1).$$

Les demandes nettes ne sont fonction que des prix relatifs (ici, à celui du bien 1) ; elles ne dépendent donc que de $n - 1$ variables. Ce qui apparaît d'autant plus clairement si on pose $p_1 = 1$, c'est-à-dire si on prend le bien 1 comme *numéraire* (le choix de celui-ci est donc arbitraire : tout bien dont le prix n'est pas nul peut servir de numéraire).

B. La somme des valeurs des demandes nettes est nulle (« loi de Walras »)

Cette propriété découle de l'égalité comptable entre emplois et ressources, qui s'écrit dans le cas du ménage j :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i d_{ij}(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i d_{ij}^{\circ},$$

où q_{ij}° désigne sa *dotation initiale* en bien i (pour simplifier la présentation, on ne tient pas compte de la part des profits des entreprises que le ménage peut recevoir, en tant qu'actionnaire).

Cette égalité peut s'écrire, de façon équivalente :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i (d_{ij}(p_1, \ldots, p_n) - q_{ij}^{\circ}) = 0.$$

Or, comme q_{ij}° est l'*offre* du bien i par le ménage j, il s'ensuit que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i e_{ij}(p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

C'est la loi de Walras pour l'individu j. Par sommation sur tous les individus, il vient *la loi de Walras* proprement dite (c'est-à-dire, pour les demandes nettes globales) :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i e_i(p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Il découle de cette relation que les demandes nettes sont (linéairement) dépendantes : si on en connaît $n - 1$, alors on peut en déduire celle qui reste (si elle n'est pas pondérée par un prix nul).

Une des conséquences de ces deux propriétés des demandes nettes est que la recherche des prix d'équilibre d'une économie à n biens se ramène à celles des solutions d'un système de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues (les prix relatifs).

III Les conditions d'existence d'au moins un équilibre général

Les demandes nettes étant données, la question qui se pose alors est celle de l'existence d'un vecteur-prix qui annule simultanément toutes les demandes nettes. La réponse à cette question est positive si *les demandes nettes sont définies, continues et bornées*, pour tous les vecteurs-prix envisageables. Dans une économie d'échanges en concurrence parfaite, ces conditions sont vérifiées si, pour l'essentiel :

- *il n'y a pas d'incertitude*, et donc pas de spéculation (celle-ci pouvant donner lieu à des offres ou des demandes – théoriquement – infinies) ; l'absence d'incertitude découle ici de l'hypothèse selon laquelle il existe un *système complet de marchés* (*cf.* fiche 6) ;
- les biens sont indéfiniment divisibles ;
- il y a *convexité des préférences* (les individus « aiment les mélanges » – *cf.* fiche 2) ;
- chaque ménage dispose d'une dotation initiale qui lui permet de survivre sans faire d'échanges (dans les applications, on supposera que les individus peuvent survivre sans rien consommer).

Ces conditions sont dites *de Arrow-Debreu*, du nom des deux auteurs qui ont montré que, si elles sont vérifiées, il existe un vecteur-prix d'équilibre de concurrence parfaite.

APPLICATIONS

1. On se situe dans le *cas minimal*, celui d'une économie d'échanges avec deux individus, A et B, et deux biens, 1 et 2. Les données du modèle sont :

– les *fonctions d'utilité* de A et de B définies par les formules :

$$U_A(q_1, q_2) = q_1^{1/2}\, q_2 \text{ pour } A \qquad \text{et} \qquad U_B(q_1, q_2) = q_1\, q_2 \text{ pour } B;$$

– les *dotations initiales*:

$$(9{,}3) \text{ pour } A \qquad \text{et} \qquad (4{,}8) \text{ pour } B.$$

Les fonctions d'utilité étant du type Cobb Douglas (*cf.* fiche 3), elles vérifient les hypothèses de Arrow-Debreu (ici, pour l'essentiel, la convexité des préférences) : il existe donc au moins un vecteur-prix d'équilibre de concurrence parfaite.

Prenons l'un des biens comme numéraire ; par exemple, le bien 1 (on pose donc : $p_1 = 1$). Il ne reste donc plus qu'à déterminer le prix (d'équilibre) du bien 2. Il suffit pour cela de raisonner sur une seule des demandes nettes (si elle s'annule, l'autre le fait aussi en raison de la loi de Walras) ; supposons que c'est celle du bien 1.

La demande du bien 1 est, pour A, $R_A/3p_1$ (*cf.* fiche 7, Cobb-Douglas avec $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1$) et, pour B, $R_B/2p_1$ (Cobb-Douglas avec $\alpha = \beta = 1$), où R_A et R_B sont, respectivement, les revenus de A et de B. Comme l'offre globale du bien 1 est égale à 13 (somme des dotations initiales en bien 1 de A et de B), la demande nette de ce bien est :

$$e_1(p_1, p_2) = \frac{R_A}{3p_1} + \frac{R_B}{2p_1} - 13.$$

Aux prix (p_1, p_2), le revenu de A et de B est donné par la valeur, à ces prix, de leurs dotations initiales ; soit : $R_A = 9p_1 + 3p_2$ et $R_B = 4p_1 + 8p_2$. Sachant que $p_1 = 1$ (le bien 1 sert de numéraire), le prix d'équilibre p_{e2} du bien 2 doit être tel qu'il annule la demande nette du bien 1, c'est-à-dire tel que :

$$\frac{9 + 3p_{e2}}{3} + \frac{4 + 8p_{e2}}{2} - 13 = 0.$$

D'où :

$$p_{e2} = 8/5 = 1{,}6.$$

Ou, si l'on veut : le prix relatif d'équilibre, entre le bien 2 et le bien 1, est égal à 8/5.

La situation peut être décrite dans un *diagramme d'Edgeworth* (*cf.* fiche 5), le vecteur-prix d'équilibre P_e étant perpendiculaire à la droite issue du point $Q°$ (qui représente les dotations initiales) et qui est tangente en un même point aux courbes d'indifférence de A et de B (point E de la figure 19.1).

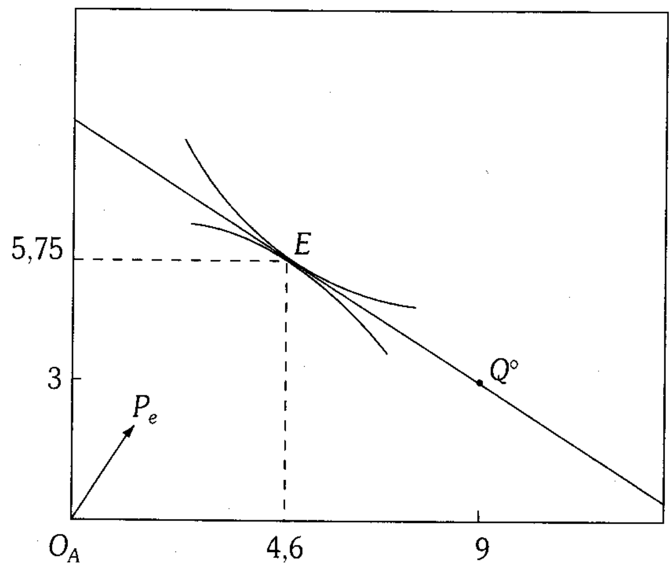

Figure 19.1

2. On considère une économie d'échanges formée de deux agents X et Y, dont les fonctions d'utilité sont :

$$U_X(q_1, q_2) = 4q_1^{1/2} + q_2 \qquad \text{et} \qquad U_Y(q_1, q_2) = q_1 + q_2,$$

et dont les dotations initiales sont :

(1,2) pour X et (4,4) pour Y.

Les conditions de Arrow-Debreu étant vérifiées (puisque les courbes d'indifférence sont convexes), il existe au moins un équilibre général pour cette économie. Pour le trouver, on peut partir de la condition d'égalisation des taux marginaux de substitution au rapport des prix. Comme, dans le cas présent, ce taux est toujours égal à 1 pour Y, on essaye de voir ce qui se passe lorsque le rapport des prix est lui aussi égal à 1, en posant par exemple $p_1 = 1$ et $p_2 = 1$. Comme le taux marginal de substitution de X en un panier (q_1, q_2) quelconque est $2/q_1{}^{1/2}$, il vient, par égalisation au rapport des prix : $2/q_1{}^{1/2} = 1$, et donc $q_1 = 4$. Aux prix $p_1 = 1$ et $p_2 = 1$, la valeur de cette quantité de q_1 est égale à 4. Or le revenu de X – valeur de ses dotations initiales à ces prix –, est égal à 3 (= $1 \times 1 + 1 \times 2$). Par conséquent, X ne peut acheter, avec ce revenu, les 4 unités du bien 1 qui découlent de l'application de la règle d'égalisation de son taux marginal de substitution au rapport des prix. Il va donc en acheter seulement 3 unités, et aucune du bien 2, de sorte que l'équilibre se présente comme une *solution en coin* (*cf.* fiche 8), la situation étant décrite dans le diagramme d'Edgeworth de la figure 19.2.

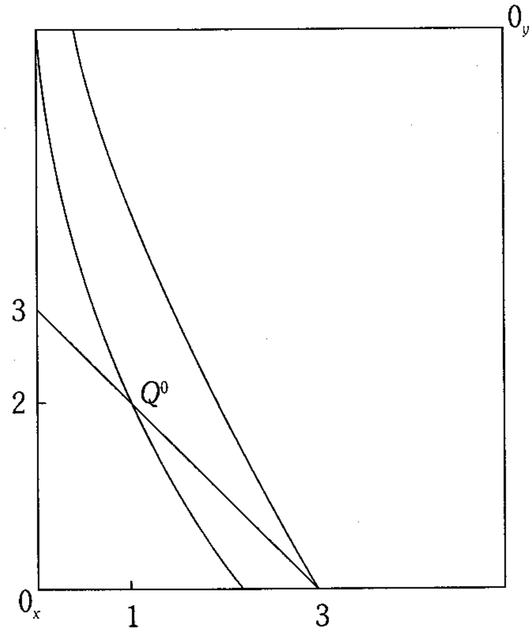

Figure 19.2

On peut noter, à propos de cette solution :

- que Y ne gagne rien en passant de la répartition initiale $Q°$ à celle d'équlibre E (il reste sur la même courbe d'indifférence) ;
- que le TMS de X à l'équilibre, $2/\sqrt{3}$, est strictement supérieur à celui de Y (qui est égal à 1) ; cette différence entre taux marginaux de substitution à l'équilibre est typique d'une solution en coin ; celle-ci est possible car aucun des deux agents n'a des courbes d'indifférence de type hyperbolique.

Le modèle comporte-t-il d'autres équilibres ? Non, car si $p_2 < p_1$, Y ne demande que du bien 2, sa demande étant égale à R_Y/p_2 donc, puisque $R_Y = 4p_1 + 4p_2$ (valeur de la dotation initiale de Y), à $4p_1/p_2 + 4$. Comme cette demande est supérieure à 8, car $p_1/p_2 > 1$, alors que l'offre totale (du bien 2) est $4 + 2 = 6$, elle ne peut être satisfaite : il n'y a pas équilibre. Le raisonnement est le même si $p_2 > p_1$, car alors Y ne demande que du bien 1, en quantité supérieure à 8, alors que l'offre totale de ce bien est égale à $4 + 1 = 5$.

20 Équilibre général avec production

La prise en compte explicite de la production ne modifie pas fondamentalement le modèle d'équilibre général en concurrence parfaite, tel qu'il a été présenté dans la fiche 19. Il faut seulement rajouter aux données de ce modèle les ensembles de production qui caractérisent les entreprises, dont le nombre est fixé à l'avance, et préciser la façon dont leurs profits sont répartis entre les ménages. Ainsi, l'entreprise k va être caractérisée par une fonction de production $f_k(\cdot)$, tandis que le ménage j sera supposé avoir droit à une part a_{jk} du profit de l'entreprise k (a_{jk} est donc compris entre 0 et 1, et $\sum_j a_{jk} = 1$ puisque, par hypothèse, le profit de l'entreprise k, quelle qu'elle soit, est entièrement redistribué aux ménages). Lorsqu'ils établissent leurs plans, les ménages doivent donc connaître les profits des entreprises dont ils sont les actionnaires ; on peut supposer que cette information leur est transmise directement par les entreprises ou, ce qui est plus dans la logique du modèle, par le commissaire-priseur (lui-même informé par les entreprises).

I Propriétés des demandes nettes

Les deux propriétés – *cf.* fiche 19 – qui caractérisent les demandes nettes en concurrence parfaite ne sont pas modifiées. Ainsi, les demandes nettes avec production sont homogènes de degré 0, puisque le choix des inputs par le producteur dépend de leur *prix relatif* à celui de l'output (comme le montre l'égalité $pf'_{q_i}(q_1,\dots,q_n) = p_i$) : multiplier tous les prix par une constante strictement positive λ ne modifie donc en rien ce choix. Il est vrai que le profit est, lui, multiplié par λ ; mais comme il en est de même pour tous les éléments du revenu des consommateurs (dont le profit est une partie), le choix de ceux-ci n'est pas non plus modifié (les prix des biens qu'ils achètent étant eux aussi multipliés par λ).

La *loi de Walras* demeure aussi valable lorsqu'il y a production. Pour l'établir, on part à nouveau de la contrainte budgétaire des ménages, mais en tenant compte de ce que les profits des entreprises sont redistribués aux ménages (ou à certains d'entre eux). Si on note $f_{ik}(q_{1k},\dots,q_{nk})$ la production du bien i par l'entreprise k, avec le panier d'inputs $(q_{1k},\dots,q_{nk})$, alors son profit lorsqu'elle achète ce panier d'inputs est :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i f_{ik}(q_{1k},\dots,q_{nk}) - \sum_{i=1}^{i=n} p_i q_{ik}.$$

La contrainte budgétaire du ménage j – auquel revient la part a_{kj} de ce profit, $k = 1,\dots,p$ – s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i q_{ij} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i q_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{k=p} a_{jk}\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i f_{ik}(q_{1k},\ldots,q_{nk}) - \sum_{i=1}^{i=n} p_i q_{ik}\right),$$

q_{ij} désignant la quantité de bien i demandée par le ménage j.

Si on additionne membre à membre ces égalités sur l'ensemble des ménages, donc par rapport à l'indice j, on obtient (compte tenu de ce que par définition des coefficients a_{jk}, $\sum_j a_{jk} = 1$, $k = 1,\ldots,p$) :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i[(\sum_{j=1}^{j=m} q_{ij} + \sum_{k=1}^{k=p} q_{ik}) - (\sum_{k=1}^{k=p} f_{ik}(q_{1k},\ldots,q_{nk}) + \sum_{j=1}^{j=m} q_{ij}^0)] = 0.$$

C'est la loi de Walras, les demandes étant maintenant celles des ménages (les q_{ij}) et des entreprises (les q_{ik}), tandis que les offres sont formées par les dotations initiales (les q°_{ij}) et par les quantités produites par les entreprises (les $f_{ik}(q_{1k},\ldots, q_{nk})$). Les unes et les autres, en dehors des dotations initiales, sont des fonctions des prix. C'est pourquoi on a, comme dans le cas d'une économie d'échange :

$$\sum_i p_i e_i(P) = 0,$$

où $e_i(P)$ est la demande nette du bien i, aux prix P.

II L'existence de l'équilibre

Aux conditions sur les relations de préférence et sur les dotations initiales des ménages s'ajoutent celles sur les fonctions de production des entreprises. Afin de ne pas avoir des offres infinies à certains prix, on suppose que les productivités marginales sont décroissantes et que les rendements d'échelle sont non croissants. Ces conditions sont vérifiées si les fonctions de production sont concaves. Si tel est le cas, alors il existe au moins un équilibre (théorème de Arrow-Debreu, avec production).

APPLICATIONS

1. Soit l'économie formée par :

- un ménage dont la relation de préférence est représentée par la fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par :

$$U(q_1,q_2) = q_1^{1/3}q_2,$$

et qui a pour dotation initiale (8,2) ;

- une entreprise dont la fonction de production est telle qu'elle associe à toute quantité q_1 du bien 1 la quantité $2q_1$ du bien 2 (on a donc $q_2 = f(q_1) = 2q_1$).

Les conditions de Arrow-Debreu étant vérifiées, il existe au moins un équilibre. Comme la fonction de production est à rendements d'échelle constants, l'entreprise ne peut que faire un profit nul à l'équilibre. En effet, si les prix des biens 1 et 2 sont, respectivement, p_1 et p_2, le profit de l'entreprise lorsqu'elle dispose d'une quantité q_1 d'input 1 – à partir de laquelle elle produit une quantité $2q_1$ du bien 2 – est :

$$\pi(q_1) = p_2 \times 2q_1 - p_1 q_1 = (2p_2 - p_1)q_1.$$

Pour que la demande de l'input 1 ne soit pas infinie – rappelons qu'en concurrence parfaite, les agents croient qu'ils peuvent acheter ou vendre tout ce qu'ils veulent, aux prix affichés (*cf.* fiche 6) –, il faut que le profit unitaire, $2p_2 - p_1$, soit négatif ou nul, donc que $2p_2 \leqslant p_1$.

Deux cas doivent donc être envisagés :

• Supposons que $2p_2 = p_1$. Prenons, par exemple, le bien 2 comme numéraire (donc $p_2 = 1$, et $p_1 = 2$), et intéressons-nous aux demandes du ménage. Celui-ci ayant une fonction d'utilité du type Cobb-Douglas avec $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1$, sa demande du bien 1 est $R/3p_1$, celle du bien 2 étant $2R/3p_2$ (*cf.* fiche 7). Aux prix $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$, le revenu R du ménage est donné par la valeur de sa dotation initiale ; soit : $R = 8 \times 2 + 2 \times 1 = 18$. D'où les demandes : $18/(3 \times 2) = 3$ pour le bien 1, $2 \times 18/(3 \times 1) = 12$ pour le bien 2. Le ménage offre donc $8 - 3 = 5$ unités du bien 1 à l'entreprise, qui s'en sert pour produire $2 \times 5 = 10$ unités du bien 2, qu'elle offre au ménage (si on ajoute sa dotation initiale en bien 2, on retrouve sa demande $10 + 2 = 12$ de ce bien). Comme le choix du ménage est satisfait, il s'ensuit que :

$$p_1 = 2 \textit{ et } p_2 = 1 \textit{ sont des prix d'équilibre,}$$

comme l'est tout vecteur-prix tel que $p_1/p_2 = 2$.

Y a-t-il d'autres vecteurs d'équilibre ? Pour répondre à cette question, il faut aborder le deuxième cas.

• Supposons que $2p_2 < p_1$. Dans ce cas, le ménage demande encore plus de bien 2 que lorsque $2p_2 = p_1$, alors que l'offre de l'entreprise est nulle : il ne peut donc y avoir équilibre (égalité de l'offre et de la demande du bien 2).

Le modèle ne comporte donc qu'un seul prix relatif d'équilibre : $p_1/p_2 = 2$.

2. On considère la même économie que dans l'exemple précédent, mais en supposant que la dotation initiale du ménage est (1,7).

La condition $2p_2 \leqslant p_1$ est toujours nécessaire pour qu'il y ait équilibre de concurrence parfaite. Dans le « premier » cas, celui où $2p_2 = p_1$, le revenu du ménage est – si on prend le bien 2 comme numéraire : $2 \times 1 + 1 \times 7 = 9$, sa demande de bien 1 étant $9/(3 \times 2) = 1{,}5$, celle du bien 2, $2 \times 9/(3 \times 1) = 6$. Autrement dit, lorsque $2p_2 = p_1$, le ménage demande 0,5 (= 1,5 – 1) unité supplémentaire du bien 1, en offrant en contrepartie 1 (= 7 – 6) unité du bien 2. Toutefois, contrairement au cas précédent, l'entreprise ne peut satisfaire la demande en bien 1 du ménage, puisqu'elle même *demande* du bien 1 (comme input) et *offre* du bien 2. Conclusion : il n'y a pas d'équilibre tel que $2p_2 = p_1$.

Les prix d'équilibre, dont on sait qu'ils existent (les hypothèses de Arrow-Debreu étant vérifiées), sont donc tels que $2p_2 < p_1$. Comme l'entreprise ne produit pas dans ce cas (si elle le faisait, ce serait à perte), le seul équilibre possible est celui où il y a *autarcie,* c'est-à-dire où il n'y a pas d'échanges. Pour qu'il y ait équilibre, il faut alors que le rapport des prix affichés soit égal au taux marginal de substitution du ménage en (1,7) (sa dotation initiale). Ce taux – rapport des utilités marginales (ici, q_2/q_1) – étant égal à $7/1 = 7$, il n'y a équilibre que si $p_1/p_2 = 7$. À ce taux d'échange, le ménage choisit sa dotation initiale : il n'est donc ni offreur, ni demandeur de biens (il se contente de ce qu'il a, vu les prix existants).

3. On considère une économie formée de deux ménages, A et B, et d'une entreprise, qui produit un bien à partir du travail fourni par les ménages (ceux-ci consommant le bien produit par l'entreprise). On suppose que :

– les ménages ont *la même fonction d'utilité :*

$$U(\ell,q) = \ell \times q,$$

où q et ℓ sont – respectivement – des quantités de bien et de loisir, et le même temps disponible, $T = 24$;

– le ménage A est le seul propriétaire de l'entreprise (le profit de celle-ci lui revient entièrement) ;

– la fonction de production $f(\cdot)$ de l'entreprise est telle que :

$$f(L) = 2L^{1/2},$$

où L est une quantité de travail.

Appelons s le salaire et p le prix du bien (inconnues du problème). La condition de profit maximum (égalité entre produit marginal et prix de l'input) s'écrit ici : $p \times L^{-1/2} = s$. Il s'ensuit, pour l'entreprise :

– demande de travail : $L^d = (p/s)^2$,

– offre de bien : $f(p/s) = 2[(p/s)^2]^{1/2} = 2p/s$,

– profit : $pf(p/s) - s(p/s) = p(2p/s) - s(p/s)^2 = p^2/s$.

Le revenu de A, R_A, est donné par la valeur de son temps disponible, $24s$, à laquelle s'ajoute le profit versé par l'entreprise (dont il est, par hypothèse, le seul actionnaire). Soit :

$$R_A = 24s + \frac{p^2}{s}.$$

Le revenu de B, R_B, se limite à la valeur de son temps disponible. Soit :

$$R_B = 24s.$$

La fonction d'utilité, la même pour A et pour B, étant de type Cobb Douglas, avec des exposants égaux, la demande du bien est, lorsque le revenu est R, $R/2p$ (*cf.* fiche 7). Si on remplace R par la valeur de R_A donnée ci-dessus, on obtient la demande de bien de A : $12s/p + p/2s$. On obtient, de même, la demande de bien de B : $12s/p$. La demande globale du bien est donc

$$12\frac{s}{p} + \frac{p}{2s} + 12\frac{s}{p} \left(= 24\frac{s}{p} + \frac{p}{2s}\right).$$

Comme son offre est $2p/s$, il y a équilibre si :

$$24\frac{s}{p} + \frac{p}{2s} = \frac{2p}{s},$$

donc si : $s/p = 1/4$.

À ce salaire (réel), la demande de loisir de A est $R_A/2s = 12 + p^2/2s^2 = 20$; son offre de travail est donc égale à 4 (= 24 – 20). De même, comme la demande de loisir de B est : $R_B/2s = 12$, son offre de travail est égale à 12 (= 24 – 12). Elle est beaucoup plus importante que celle de A, qui n'a pas que son travail comme source de revenu. Ces offres de travail sont satisfaites, puisqu'il y a équilibre. En les reportant dans la fonction de production, on obtient la production d'équilibre de l'entreprise, $f(4+12) = 2 \times 16^{1/2} = 8$.

21 Critère et optimums de Pareto

Le critère de Pareto fournit un moyen pour comparer entre elles certaines des répartitions des ressources disponibles dans l'économie, ses *états réalisables*. Parmi ceux-ci, il y a les *optimums de Pareto,* auxquels la microéconomie donne un statut privilégié, car ils sont des états réalisables dans lesquels la répartition des ressources est « efficiente » (selon le critère de Pareto).

I Les états réalisables

Un *état réalisable* d'une économie est une affectation de ses ressources parmi les agents qui la composent. Ainsi, dans le cas le plus simple, celui d'une économie d'échanges (sans production) où il y a m individus et où l'ensemble des ressources disponibles est représenté par un vecteur $S = (q_1, \dots, q_n)$, dans lequel q_i est la quantité du bien i dont dispose l'économie dans son ensemble, un état réalisable est un ensemble $\{Q_1,\dots,Q_m\}$ de paniers de biens, le panier $Q_j = (q_{j1},\dots,q_{jn})$ étant attribué à l'individu j. Comme on ne peut, évidemment, répartir que ce dont on dispose, l'état réalisable $\{Q_1,\dots,Q_m\}$ doit être tel que :

$$Q_1 + \dots + Q_m = S.$$

Dans le cas où il y a production, un état réalisable est une affectation des ressources disponibles entre les ménages et les entreprises (inputs), la production (output) de celles-ci étant elle-même répartie entre les agents économiques.

Toutefois, et c'est là le point essentiel, comme la consommation (présente et future) est l'objectif ultime de la production, les états réalisables sont comparés selon l'utilité procurée aux ménages ; c'est ce que fait le critère de Pareto.

II Le critère de Pareto

Le critère de Pareto est un *critère unanimiste* car, pour lui, un état réalisable est préféré à un autre s'il lui est préféré *par tout le monde*. Plus précisément, l'état réalisable $\{Q_1,\dots,Q_m\}$ est préféré à l'état $\{Q'_1,\dots,Q'_m\}$ selon le critère de Pareto si et seulement si $Q_i \underset{i}{\gtrsim} Q'_i$, pour chaque $i = 1,\dots,m$; ou, si on représente la relation de préférence de i par une fonction d'utilité $U_i(\cdot)$:

$$\{Q_1,\dots,Q_m\} \text{ préféré à } \{Q'_1,\dots,Q'_m\} \text{ si et seulement si } U_i(Q_i) \geqslant U_i(Q'_i),\ i = 1,\dots,m).$$

Le caractère unanimiste du critère apparaît ici dans le fait que si on propose aux individus de changer l'affectation des ressources de $\{Q'_1,...,Q'_m\}$ à $\{Q_1,...,Q_m\}$, personne ne s'y oppose (car personne ne perd au changement). Si, en outre, le changement implique que l'utilité d'au moins un agent augmente, alors on dit que $\{Q_1,...,Q_m\}$ est *strictement préféré* selon le critère de Pareto à $\{Q'_1,...,Q'_m\}$.

On déduit immédiatement du fait que les relations de préférence individuelles sont transitives, que le critère de Pareto l'est aussi. En revanche, il n'est pas complet (ou total), car il ne permet pas de classer *tous* les états réalisables. On comprend aisément pourquoi : puisque ceux-ci représentent des *répartitions de ressources*, nécessairement limitées, entre les individus, il ne peut y avoir consensus sur la façon de classer l'ensemble de ces répartitions (du moins si chacun cherche « à en avoir plus »). Un consensus relatif peut cependant avoir lieu dans le cas des états réalisables où il est possible d'effectuer des échanges mutuellement avantageux.

APPLICATIONS

1. Soit une économie d'échange, avec trois biens (notés 1, 2 et 3) et trois individus, *A*, *B* et *C*, dont les relations de préférence sont représentées par les fonctions d'utilité: $U_A(q_1,q_2,q_3) = q_1q_2q_3$, $U_B(q_1,q_2,q_3) = q_1 + q_2 + q_3$ et $U_C(q_1,q_2,q_3) = q_1^2q_2q_3$.
Les ressources totales de l'économie sont données par le vecteur $S = (12,12,12)$. On cherche à classer, si possible, selon le critère de Pareto, les états réalisables suivants (de la forme $\{Q_A, Q_B, Q_c\}$) :
- $R_1 = \{(12,0,0),(0,12,0),(0,0,12)\}$
- $R_2 = \{(6,4,1),(6,8,1),(0,0,10)\}$
- $R_3 = \{(4,4,4),(4,4,4),(4,4,4)\}$
- $R_4 = \{(1,7,3),(6,2,5),(5,3,4)\}$
- $R_5 = \{(5,2,5),(4,5,3),(3,5,4)\}$

À ces états réalisables correspondent les vecteurs d'utilité (de la forme $(U_A(Q_A), U_B(Q_B), U_C(Q_C)))$:
- en R_1 : (0,12,0)
- en R_2 : (24,15,0)
- en R_3 : (64,12,256)
- en R_4 : (21,13,432)
- en R_5 : (50,12,180).

Les états réalisables R_2, R_3, R_4 et R_5 sont donc (strictement) préférés, selon le critère de Pareto, à R_1. En outre, R_3 est strictement préféré à R_5. Ce sont tous les classements que permet le critère de Pareto.

2. On considère une économie d'échanges à deux agents et deux biens, qui peut donc être représentée par un diagramme d'Edgeworth (*cf.* fiche 5). Chaque point de la « boîte » correspond à un état réalisable. Pour n'importe quel état réalisable $Q°$ les états réalisables qui lui sont préférés selon le critère de Pareto sont représentés par des points de la « lentille », notée I et en gris dans la figure 21.1, comprise entre les courbes d'indifférence – de *A* et de *B* – qui passent par le point représentant $Q°$. Celui-ci est, en revanche, préféré selon le critère de Pareto à tous les états réalisables représentés par les points des zones notées II et III dans la figure 21.1 (dans l'un et l'autre cas la préférence est stricte, sauf en ce qui concerne le point Q^1). En revanche, $Q°$ ne peut être comparé aux états réalisables représentés par les points des zones notées IV et V dans la figure 21.1.

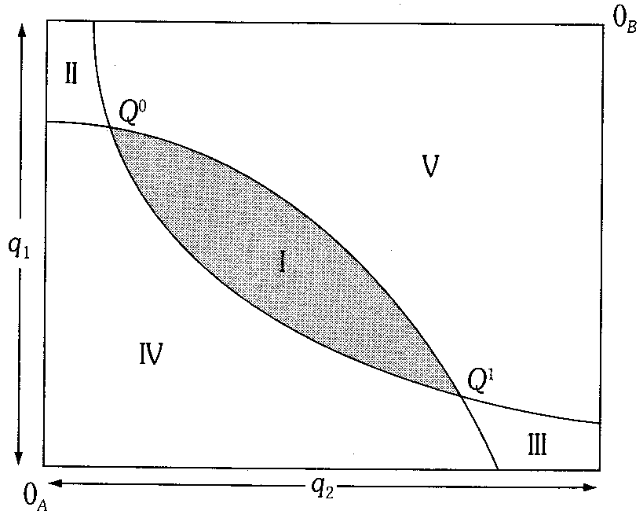

Figure 21.1

III Les optimums de Pareto

Pour tout état réalisable, deux situations sont possibles : soit il existe un état réalisable qui lui est strictement préféré selon le critère de Pareto, soit il n'en existe pas. Dans ce dernier cas, l'état considéré est, par définition, un *optimum de Pareto.* Autrement dit, lorsqu'il y a optimum de Pareto, il n'est pas possible d'augmenter l'utilité d'un individu, quel qu'il soit, sans diminuer celle d'au moins un autre.

Il existe généralement une infinité (un *continuum,* même) d'optimums de Pareto. Par exemple, si on suppose que les préférences des individus sont monotones (*cf.* fiche 2), alors les états réalisables $\{S,0,0,...,0\}$, $\{0,S,0,...,0\}$,..., $\{0,0,...,S\}$ sont des optimums de Pareto. Mais il y évidemment beaucoup d'autres d'optimums de Pareto. Ainsi, tout état réalisable où il n'y a plus la possibilité de faire des échanges mutuellement avantageux est un optimum de Pareto. Dans le cas « usuel », où les courbes d'indifférence sont « de type hyperbolique », ces états se caractérisent par le fait que le taux marginal de substitution entre deux biens quelconques est le même pour tous les agents (leurs taux d'échanges « subjectifs » étant égaux, il n'y a plus la possibilité de faire des gains à travers l'échange). Ce résultat s'étend aisément au cas où il y a production, du moins si les isoquantes sont aussi de type hyperbolique.

Dans le cas de l'économie à deux agents et deux biens décrite par le diagramme d'Edgeworth, l'ensemble des optimums de Pareto prend généralement la forme d'une courbe, appelée *courbe de contrat,* telle celle qui est représentée dans la figure 5.2 de la fiche 5.

APPLICATION

On suppose que les relations de préférence de A et de B sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité : $U_A(q_1,q_2) = q_1q_2$ et $U_B(q_1,q_2) = q_1^{1/2}q_2$. Les ressources totales sont données par le vecteur $S = (10, 20)$.

Comme on est dans le cas usuel (courbes d'indifférence hyperboliques, les fonctions d'utilité étant de type Cobb-Douglas), les optimums de Pareto sont caractérisés par l'égalité des taux marginaux de substitution. Comme, ici $TMS_A^{2/1}(q_1,q_2) = q_2/q_1$ et $TMS_B^{2/1}(q_1,q_2) = q_2/2q_1$, cette égalité s'écrit, en distinguant les quantités détenues par A et par B :

$$\frac{q_{2A}}{q_{1A}} = \frac{q_{2B}}{2q_{1B}}.$$

À cette équation s'en rajoutent deux autres, les contraintes sur les ressources disponibles :

$$\begin{cases} q_{1A} + q_{1B} = 10 \\ q_{2A} + q_{2B} = 20 \end{cases}$$

On est donc en présence de trois équations et de quatre inconnues. Comme il y a plus d'inconnues que de variables, celles-ci sont liées entre elles. Des contraintes sur les ressources disponibles on tire $q_{1B} = 10 - q_{1A}$ et $q_{2B} = 20 - q_{2A}$, puis on remplace dans la condition d'optimalité (égalité des TMS). Il vient :

$$\frac{q_{2A}}{q_{1A}} = \frac{20 - q_{2A}}{10 - q_{1A}}.$$

D'où on tire : $q_{2A} = 2q_{1A}$.

C'est l'équation de la courbe de contrat. Celle-ci est donc, ici, une droite ; plus précisément, c'est la diagonale O_AO_B de la boîte d'Edgeworth.

IV Frontière des utilités, frontière des productions

Lorsqu'il n'y a que deux agents, les classements des états réalisables selon le critère de Pareto peut être présenté, de façon indirecte mais suggestive, dans un système d'axes où son représentées les utilités (ou les productions) des deux agents considérés. Ainsi, dans le cas d'une économie d'échanges – où les agents sont appelés A et B –, un état réalisable $\{Q_A+Q_B\}$ a pour image dans le « plan des utilités » le point $(U_A(Q_A),U_B(Q_B))$. Par conséquent, les état réalisables préférés selon le critère de Pareto à $\{Q_A,Q_B\}$ sont ceux dont l'image se trouve « en haut et à droite » de $(U_A(Q_A),U_B(Q_B))$ (zone I de la figure 4, qui correspond à la zone I de la figure 1), tandis que $\{Q_A,Q_B\}$ est préféré selon ce critère aux points dont l'image se trouve « en bas et à gauche » de $(U_A(Q_A), U_B(Q_B))$ (zone II-III de la figure 4, notée ainsi parce qu'elle correspond aux zones II et III de la figure 1). Les autres points (zones IV et V) représentent des états réalisables non comparables à $\{Q_A, Q_B\}$, selon le critère de Pareto.

La courbe MN qui délimite « par le haut » les couples possibles d'utilités, est appelée *frontière des utilités* ; généralement décroissante, elle donne les couples d'utilités associés aux divers optimums de Pareto (image de la courbe de contrat dans l'espace des utilités).

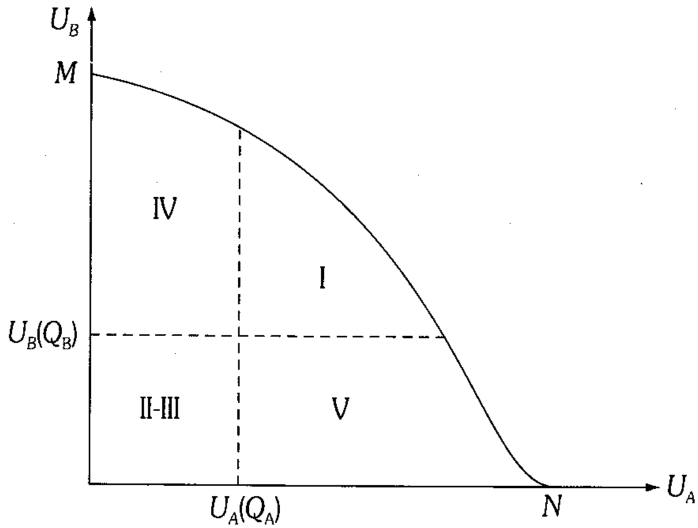

Figure 21.2

La frontière des utilités n'a pas de sens en soi, puisqu'elle dépend des fonctions d'utilité retenues pour représenter les relations de préférence des consommateurs.

En revanche, la frontière des productions a une signification, car les productions sont, à la différence des utilités, quantifiables sans ambiguïté. La valeur absolue de la pente de la tangente en un point à cette courbe donne le *taux marginal de transformation* des deux produits considérés (diminution minimum de la quantité produite de l'un des biens pour obtenir une augmentation – d'une unité – de la quantité produite de l'autre).

APPLICATION

On considère deux entreprises, A et B, dont les fonctions de production sont, respectivement : $f_A(q_1,q_2) = q_1q_2$ et $f_B(q_1,q_2) = (q_1q_2)^{1/2}$. Les isoquantes étant de type hyperbolique (on est en présence de fonctions de Cobb-Douglas), la condition d'optimalité (égalité des TMS) s'écrit, en distinguant les quantités d'inputs dont disposent A et B :

$$\frac{q_{2A}}{q_{1A}} = \frac{q_{2B}}{q_{1B}}.$$

Supposons que les ressources en inputs sont données par le vecteur $S = (3,3)$. Ce qui impose les contraintes :

$$\begin{cases} q_{1A} + q_{1B} = 3 \\ q_{2A} + q_{2B} = 3 \end{cases}$$

Or, comme (propriété élémentaire du calcul de fractions) :

$$\frac{q_{2A}}{q_{1A}} = \frac{q_{2B}}{q_{1B}} = \frac{q_{2A} + q_{2B}}{q_{1A} + q_{1B}} \left(= \frac{3}{3}\right),$$

il s'ensuit que les paniers optimaux d'inputs doivent être tels que : $q_{1A} = q_{2A}$ et $q_{1B} = q_{2B}$. Avec ces inputs A produit la quantité $f_A(q_{1A}, q_{2A}) = q_{1A}q_{2A} = q_{1A}^2$; et B la quantité $f_B(q_{1B}, q_{2B}) = (q_{1B}q_{2B})^{1/2} = q_{1B}$. Si on note q_A et q_B les productions de A et de B, on déduit des égalités précédentes que $q_{1A} = q_A^{1/2}$ et $q_{1B} = q_B$. En reportant dans la contrainte concernant – par exemple – le premier bien, on trouve *l'équation de la frontière des productions* :

$$q_A^{1/2} + q_B = 3,$$

ou, ce qui est équivalent :

$$q_B = 3 - q_A^{1/2}.$$

La figure 21.3 donne le graphe de cette fonction.

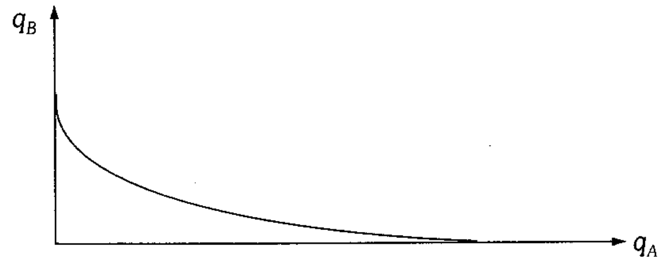

Figure 21.3

22 Les théorèmes de l'économie du bien-être

Si la microéconomie fait jouer un rôle essentiel au modèle de concurrence parfaite, c'est avant tout en raison de son caractère *normatif* ; l'équilibre de concurrence parfaite ayant la propriété d'être « optimal » (selon le critère de Pareto), il peut servir de norme. L'étroite relation qui existe entre équilibres de concurrence parfaite et optimums de Pareto est établie par les deux *théorèmes de l'économie du bien-être*, l'un étant, à quelques nuances près, la réciproque de l'autre.

I Le premier théorème

L'énoncé de ce théorème est particulièrement simple : *s'il existe un système complet de marchés et si les préférences sont monotones, alors tout équilibre de concurrence parfaite est un optimum de Pareto.* Par « équilibre de concurrence parfaite », on entend ici l'état réalisable formé par l'ensemble des quantités d'équilibre, celles dont chacun dispose après que les échanges – sans coûts – aient été effectués (aux prix d'équilibre).

La démonstration du premier théorème est particulièrement simple. Elle est immédiate dans le cas « usuel » (courbes d'indifférence « de type hyperbolique »). En effet, comme à l'équilibre chaque agent égalise son taux marginal de substitution entre deux biens (quelconques) aux rapports de leurs prix, il s'ensuit que le taux marginal entre ces deux biens est le même pour tous les agents et ce, quels que soient les biens considérés. Or c'est là la condition pour qu'il y ait optimum de Pareto (les possibilités d'échanges mutuellement avantageux étant épuisées). La figure 22.1 décrit, dans un diagramme d'Edgeworth, la situation dans le cas d'une économie d'échanges à deux biens et deux agents (l'état réalisable d'« équilibre » E correspond au vecteur-prix P_e).

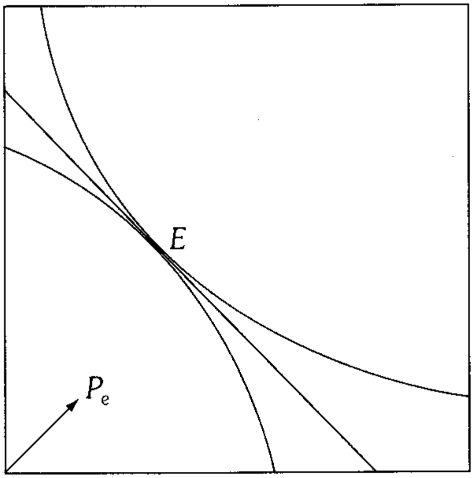

Figure 22.1

Le premier théorème de l'économie du bien-être vaut aussi dans le cas où les courbes d'indifférence n'ont pas la forme usuelle : la seule condition qu'il leur impose est d'être décroissantes. Le cas décrit par la figure 21.2 de la fiche 21 donne un exemple (solution en coin) où la condition d'égalité des taux marginaux de substitution n'est pas vérifiée, mais où l'équilibre est quand même un optimum de Pareto.

L'hypothèse selon laquelle il existe un système complet de marchés joue un rôle essentiel dans le premier théorème de l'économie du bien-être. Autrement dit, s'il existe un bien – présent ou futur – qui intervient dans l'une ou l'autre des fonctions d'utilité – ou de production – et qui n'a pas de prix affiché au moment où les agents font leur choix, alors l'équilibre général n'est plus un optimum de Pareto. En effet, comme ces choix ne prennent pas en compte l'existence de ces biens – et donc leurs effets positifs ou négatifs (appelés « externalités ») –, ils ne peuvent être utilisés de façon optimale (au sens de Pareto). L'exemple classique est celui de la pollution, l'activité d'un agent étant source de nuisances pour d'autres. Si ceux-ci peuvent inciter le pollueur à restreindre son activité, en lui versant une compensation, de sorte que le gain en utilité résultant d'une pollution moindre soit supérieur (en valeur absolue) à la perte due au versement de la compensation, alors on atteint un état réalisable préféré selon le critère de Pareto à l'équilibre de concurrence parfaite (la transaction – moins de pollution contre compensation – ayant lieu après que cet équilibre ait été atteint, en dehors des taux d'échange déduits des prix affichés).

III Le deuxième théorème

C'est, à quelques nuances près, la réciproque du précédent. On peut l'énoncer de la façon suivante : *si les hypothèses du premier théorème sont vérifiées et si, en outre, les préférences et les ensembles de production sont convexes, alors on peut associer à tout optimum de Pareto un vecteur de prix tel que cet optimum soit un équilibre de concurrence parfaite (à ces prix).*

La démonstration du deuxième théorème est plus lourde que celle du premier. Elle est en revanche immédiate dans le cas usuel (courbes d'indifférence et isoquantes « de type hyperbolique »). En effet, la condition d'optimalité de l'état réalisable $Q = \{Q_1,\ldots,Q_m\}$ est que l'on ait :

$$\mathrm{TMS}^{j}_{a/b}(Q_j) = \mathrm{TMS}^{k}_{a/b}(Q_k),$$

quels que soient les biens a et b, et les agents j et k.

Pour obtenir des prix d'équilibre de concurrence parfaite, il suffit alors de choisir un vecteur de prix P tel que l'on ait $p_b/p_a = \mathrm{TMS}^{j}_{a/b}(Q_j)$ (l'indice j pouvant désigner n'importe quel agent, puisqu'à l'optimum le taux marginal de substitution entre a et b est le même pour tous les agents). À ces prix, chaque agent égalise ses taux marginaux de substitution aux rapports de prix correspondants (condition d'optimalité), et sa contrainte budgétaire est satisfaite (en fait, ses offres et ses demandes se confondent avec sa dotation initiale) : il y a donc équilibre.

La figure 22.2 donne une illustration du théorème dans le cas d'une économie à deux agents et deux biens, représentée par un diagramme d'Edgeworth : à l'optimum Q, les courbes d'indifférence étant tangentes (égalité des TMS), on obtient le vecteur-prix d'équilibre P_e en traçant la perpendiculaire (issue de l'origine, par exemple) à la tangente commune, en Q, à ces courbes.

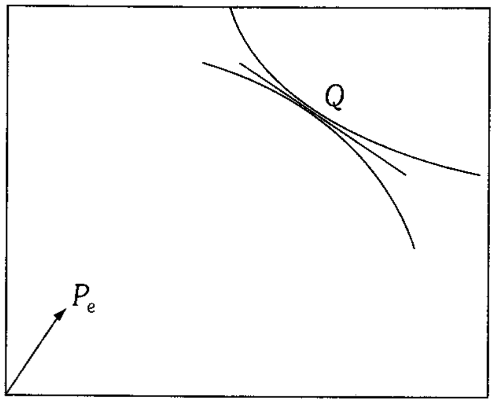

Figure 22.2

APPLICATION

Soit une économie d'échanges formée de deux biens, 1 et 2, et de trois agents, A, B et C, dont les fonctions d'utilité sont, respectivement, $U_A(q_1,q_2) = q_1 \times q_2^{1/2}$, $U_B(q_1,q_2) = q_1 \times q_2$ et $U_C(q_1,q_2) = q_1^{1/2} \times q2$ et soit l'état réalisable (de la forme $\{Q_A,Q_C,Q_C\}$) : $\{(8,2),(6,3),(5,5)\}$. Cette répartition des ressources est un optimum de Pareto, puisqu'on a - outre le fait que les courbes d'indifférence sont de type hyperbolique :

$$\mathrm{TMS}^{A}_{2/1}(8,2) = \mathrm{TMS}^{B}_{2/1}(6,3) = \mathrm{TMS}^{C}_{2/1}(5,5)\ (=1/2).$$

Cet état réalisable représente un équilibre de concurrence parfaite si le vecteur-prix affiché P est tel que $p_1/p_2 = 1/2$ [par exemple, $P = (1,2)$].

23 Le monopole

Il y a monopole lorsqu'une entreprise est la seule à produire un bien. Le monopole est néanmoins relatif si on tient compte du fait que tout bien comporte des substituts (plus ou moins proches). Toutefois, afin d'éviter les complications inhérentes aux interdépendances entre les offres et les demandes de plusieurs biens, la théorie du monopole adopte généralement un point de vue d'équilibre partiel, et ne tient donc pas compte de ces interdépendances.

I La structure du modèle

On considère une entreprise qui est la seule à produire un bien dont la quantité est notée q, et qui est caractérisée par une fonction de coût $c(\cdot)$. Par hypothèse, le reste de l'économie est en concurrence parfaite ; on suppose en outre que la fonction de demande du bien, $d(\cdot)$, est strictement décroissante, et que l'entreprise connaît cette fonction.

Lorsque l'entreprise affiche le prix p, elle sait donc qu'elle peut écouler à ce prix la quantité :

$$q = d(p). \tag{23.1}$$

L'équation (23.1) donne donc le lien entre le prix et la quantité produite par le monopole ; comme la fonction $d(\cdot)$ est supposée strictement décroissante, elle est inversible et, par conséquent, (23.1) peut se mettre sous la forme :

$$p = d^{-1}(q). \tag{23.2}$$

La fonction $d^{-1}(\cdot)$ est appelée *fonction de demande inverse* ; on la note, pour simplifier, $p(\cdot)$; $p(q)$ désigne donc le prix maximum auquel le monopole peut écouler la quantité q du bien. Comme $d(\cdot)$ est strictement décroissante, il en est de même de son inverse $p(\cdot)$.

Puisqu'il connaît le lien entre prix et quantité, le monopole peut faire porter son choix sur l'un ou l'autre d'entre eux. Comme son profit est donné par la différence :

$$pq - c(q),$$

on peut considérer soit qu'il est une fonction $\Pi(\cdot)$ du seul prix, soit qu'il est une fonction $\pi(\cdot)$ de la seule quantité produite, avec :

$$\Pi(p) = pd(p) - c(d(p))$$

et :

$$\pi(q) = p(q)\, q - c(q).$$

Une condition nécessaire pour que le prix p^* représente un profit maximum est que l'on ait (condition du premier ordre) :

$$\Pi'(p^*) = 0,$$

en supposant que les fonctions $d(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont dérivables.

De même, pour que q^* représente un profit maximum, il faut que :

$$\pi'(q^*) = 0.$$

Ces conditions sont évidemment équivalentes, puisque p^* et q^* sont liés par la relation $q^* = d(p^*)$ (ou, ce qui est la même chose, par : $p(q^*) = p^*$). C'est à partir d'elles qu'on détermine le choix du monopole (quantité produite et prix proposé).

III Le choix du monopole

On détermine ce choix à partir de l'une ou l'autre des conditions ci-dessus. Comme on raisonne habituellement avec les quantités (car cela facilite la comparaison avec la concurrence parfaite – *cf.* fiche 6), on part de la condition du premier ordre : $\pi'(q^*) = 0$. Condition qui s'écrit ici, compte tenu de la forme de la fonction $\pi(\cdot)$:

$$p'(q^*)\, q^* + p(q^*) - c'(q^*) = 0,$$

ou encore :

(23.3) $$c'(q^*) = p(q^*) + p'(q^*)q^*.$$

Comme le membre de droite de cette égalité est la dérivée, en q^*, de la recette $p(q)\, q$, on l'appelle *recette marginale*. Ainsi, la condition du premier ordre s'énonce :

recette marginale = coût marginal.

La condition (23.3) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} c'(q^*) &= p(q^*)(1 + \frac{q^* p'(q^*)}{p(q^*)}) \\ &= p(q^*)(1 + \eta_p), \end{aligned}$$

où η_p est *l'élasticité du prix relativement à la quantité produite* (*cf.* fiche 9).

En concurrence parfaite, l'entreprise prend sa décision en pensant que $\eta_p = 0$ (elle croit que son offre n'a pas d'incidence sur le prix). En revanche, le monopole sait qu'il fait face à un prix qui décroît quand il augmente son offre : η_p est négatif. Il s'ensuit donc que :

$$c'(q^*) < p(q^*).$$

Si le coût marginal est croissant, la quantité produite est donc inférieure à la quantité q_c qui serait produite en appliquant la condition : prix = coût marginal, le prix étant supérieur à celui de la concurrence parfaite, p_c. Par conséquent : le monopole produit moins, et à un prix plus élevé, que s'il adoptait un comportement de concurrence parfaite (en égalisant prix et coût marginal).

Le couple (p^*,q^*) est le *choix du monopole*. Il représente une affectation des ressources sous-optimale au sens de Pareto car l'entreprise pourrait, après avoir servi la quantité q^* à ceux qui sont disposés à payer p^*, proposer de servir à un prix légèrement inférieur à p^* (mais toujours supérieur à son coût marginal) ceux qui sont disposés à payer ce prix (mais pas p^*) ; certains y gagneraient : l'entreprise qui augmente son profit, ceux qui peuvent lui acheter du bien à un prix inférieur, sans que les autres (ceux qui payent p^*) soient perdants. Cette nouvelle affectation des ressources serait toutefois obtenue en faisant payer des prix différents à des individus différents : il y a discrimination entre les demandeurs (ce qui n'est pas pris en compte par le critère de Pareto, qui n'est concerné que par les affectations des ressources, et non par la façon dont elles sont réalisées). D'ailleurs, le cas idéal pour le monopole est celui où il peut procéder à une *discrimination parfaite* entre les demandeurs, en faisant payer à chacun le *prix maximum* qu'il est prêt à accepter (le monopole s'approprie ainsi le surplus des consommateurs – *cf.* fiche 11).

III Une étude graphique

Le choix du monopole peut être déterminé graphiquement. Pour cela on représente les courbes de coût moyen et marginal, comme cela a été fait dans la fiche 13, ainsi que la fonction de demande. À partir de celle-ci on déduit la courbe de revenu marginal, qui a une pente plus forte (en valeur absolue) que celle qui représente la demande. C'est à cause de cela que l'offre q^* du monopole est plus faible (à un prix plus élevé) que l'offre q_c « de concurrence parfaite » (qui égalise prix et coût marginal).

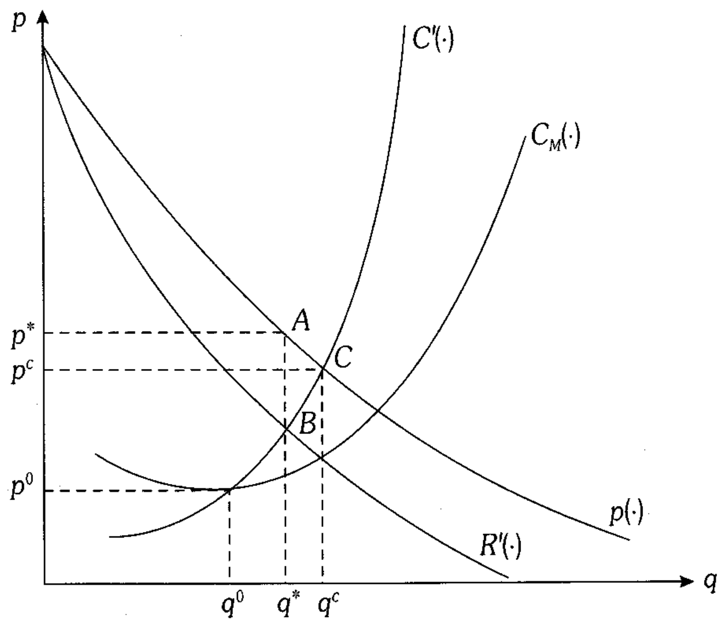

Figure 23.1

On notera que pour que l'offre du monopole lui procure un profit positif, et qu'elle soit donc effective, il faut que la courbe qui représente la recette marginale coupe la courbe de coût marginal en un point qui se trouve au-dessus du point q_0 où le coût moyen est minimum.

La perte de surplus collectif par rapport à la situation de concurrence parfaite (point C) est mesurée par la surface du « triangle » ABC, c'est-à-dire par l'intégrale :

$$\int_{q^*}^{q} (p(q) - c'(q))dq.$$

APPLICATION

On suppose que la fonction de coût du monopole est :

$$c(q) = q^3 + 2,$$

et que la fonction de demande du bien est :

$$d(p) = 33 - p.$$

Il résulte de cette dernière égalité et de l'égalité entre l'offre et la demande ($q = d(p)$), que la fonction de demande inverse $p(\cdot)$, qui associe à toute offre q le prix (maximum) $p(q)$ auquel elle peut être écoulée est telle que :

$$p(q) = 33 - q.$$

La recette $R(q)$ provenant de la vente d'une quantité q du bien, $p(q) \times q$, est donc :

$$R(q) = (33 - q) \times q.$$

D'où la recette marginale :

$$R'(q) = 33 - 2q.$$

Comme elle est décroissante, et comme le coût marginal ($c'(q) = 3q^2$) est croissant, la production q^* qui maximise le profit vérifie la condition : recette marginale = coût marginal. Elle est donc telle que :

$$33 - 2q^* = 3q^{*2}.$$

D'où, en ne retenant que la seule racine positive de cette équation :

$$q^* = 3.$$

C'est l'offre du monopole, au prix $p^* = p(q^*) = 30$.

Si le monopole avait adopté un comportement de concurrence parfaite, en égalisant son coût marginal $c'(q)$ au prix $p(q)$, on aurait eu :

$$3q^2 = 33 - q,$$

et donc la production (racine de cette équation) :

$$q_c = 3{,}18,$$

le prix correspondant étant :

$$p_c = 29{,}82.$$

La perte de surplus collectif par rapport à la concurrence parfaite, lorsque le monopole offre 3 au prix 30, est égale à :

$$\int_{3}^{3,18} (33 - q - 3q^2)dq = \left|33q - \frac{q^2}{2} - q^3\right|_3^{3,18}$$

$$= 0{,}065.$$

Supposons maintenant que l'entreprise, après avoir écoulé la quantité $q^* = 3$, au prix $p^* = 30$, cherche à vendre plus de bien, mais à un prix inférieur. Elle fait alors face à la demande résiduelle $d(p) - q^* = 33 - p - 3 = 30 - p$, dont l'inverse associe à la quantité q le prix (où elle peut être écoulée) $30 - q$. La recette procurée par l'offre q est donc égale à $(30 - q)q$; il s'ensuit que la recette marginale est égale à $30 - 2q$. Pour déterminer la quantité de bien supplémentaire qui maximise son profit, le monopole égalise cette recette au coût marginal ; soit :

$$3q^2 = 30 - 2q.$$

Équation dont la solution (positive) est :

$$q^{**} = 2{,}85.$$

En vendant 2,85 unités du bien au prix $p^{**} = 27{,}15$, le monopole augmente son profit, et les consommateurs qui achètent ces biens voient leur utilité augmenter : l'un et les autres y gagnent, par rapport à la situation où le monopole vend q^* (au prix p^*), sans que personne n'y perde ; l'affectation des ressources obtenue est supérieure, selon le critère de Pareto, à celle du monopole « à prix unique » (qui n'est donc pas optimale au sens de Pareto). On peut imaginer que le processus continue : après avoir servi q^{**} au prix p^{**}, le monopole s'intéresse à la demande résiduelle, calcule la demande résiduelle correspondante, et ainsi de suite.

24 Le duopole

On parle de duopole lorsqu'il y a deux entreprises qui produisent un même bien, en sachant que leurs décisions interagissent, le reste de l'économie étant en concurrence parfaite.

Pour que le choix des duopoleurs puisse être caractérisé, il faut que le modèle précise :

- quelles sont les *variables* sur lesquelles s'exerce ce choix ;
- *l'information* dont chacun dispose sur le reste de l'économie ;
- les *conjectures* de chaque duopoleur sur la façon d'agir – ou de réagir – de l'autre.

Les variables sur lesquelles porte le choix des duopoleurs sont soit les quantités offertes, soit les prix affichés, soit les unes et les autres. En fonction des variables retenues, on distingue *trois types de modèle* du duopole, ceux de Cournot et de Stackelberg, dans lesquels le choix des duopoleurs porte sur les quantités, et celui de Bertrand, où il porte sur les prix. Ces modèles adoptent tous une approche d'équilibre partiel (*cf.* fiche 15).

I Le duopole de Cournot

Dans ce modèle, les entreprises déterminent les quantités qu'elles offrent en supposant :

- qu'elles connaissent la fonction de demande (globale) du bien qu'elles produisent toutes deux ;
- que chacune est informée de l'offre de l'autre ;
- que chacune détermine son offre en croyant que l'autre ne modifie pas la sienne au vu de cette offre (on dit que les duopoleurs ont des « conjectures à la Cournot »).

Comme dans le cas du monopole, il est supposé que la fonction de demande n'a que le prix du bien pour argument, ce qui signifie qu'elle provient d'agents « preneurs de prix », organisés selon les règles de la concurrence parfaite – *cf.* fiche 6.

Le modèle du duopole de Cournot est donc proche de celui du monopole. En effet, compte tenu de la forme de ses conjectures, chaque duopoleur détermine son offre – après avoir pris connaissance de celle de l'autre – comme s'il était un monopole qui estime avoir à faire face à une *demande résiduelle*, celle qui reste après que l'offre de l'autre duopoleur ait été satisfaite. Comme le monopole, il applique donc la règle : coût marginal = recette marginale, en évaluant celle-ci à partir de la demande résiduelle.

Si on appelle A et B les duopoleurs – dont les offres sont notées, respectivement q_A et q_B, et les fonctions de coût, $c_A(\cdot)$ et $c_B(\cdot)$ – et si $p(\cdot)$ est la fonction de demande inverse (*cf.* fiche 23), l'égalité entre coût marginal et recette marginale (« résiduelle ») s'écrit :

– pour A $\quad c'_A(q_A) = [q_A\, p(q_A + q_B)]'_{q_A}$

– pour B $\quad c'_B(q_B) = [q_B\, p(q_A + q_B)]'_{q_B}$

(A évalue sa recette marginale en pensant que le prix auquel il peut vendre q_A est $p(q_A + q_B)$, puisqu'il fait la conjecture que l'offre q_B de B est écoulée avant la sienne. De même pour B, *mutatis mutandi*).

Soit, après calcul des recettes marginales :

$$c'_A(q_A) = p(q_A + q_B) + q_A p'(q_A + q_B) \tag{24.1}$$

$$c'_B(q_B) = p(q_A + q_B) + q_B p'(q_A + q_B). \tag{24.2}$$

La condition (24.1) définit q_A en tant que *fonction implicite* (*cf.* fiche 25) de q_B. Cette fonction, qu'on notera $r_A(\cdot)$ et qui fait correspondre à l'offre q_B de B l'offre $q_A = r_A(q_B)$ de A, est appelée *fonction de réaction* de A. De même, la condition (24.2) définit la fonction de réaction $r_B(\cdot)$ de B (qui à l'offre q_A de A fait correspondre l'offre $r_B(q_A)$ de B).

Il n'y a évidemment aucune raison pour que l'offre faite par A en réaction à une offre de B soit justement celle que B attendait au moment de faire sa propre offre. Si, pourtant, tel est le cas, c'est-à-dire si on a *simultanément* $q_A = r_A(q_B)$ et $q_B = r_B(q_A)$, alors les conjectures de A et de B sont vérifiées, et on dit qu'il y a *équilibre de Cournot*. Un équilibre de Cournot est donc un couple d'offres (q_A^*, q_B^*) qui vérifie le système d'équations formé par (24.1) et (24.2), les fonctions de coût et de demande ayant les propriétés usuelles.

APPLICATION

Supposons que la fonction de demande $d(\cdot)$ est telle que :

$$d(p) = 56 - 2p.$$

Pour une offre globale $q_A + q_B$ des duopoleurs, le prix $p(q_A + q_B)$ qui égalise l'offre et la demande (globales) est donc tel que :

$$p(q_A + q_B) = 28 - 0{,}5(q_A + q_B).$$

Supposons que les deux entreprises ont la même fonction de coût $c(\cdot)$ définie par :

$$c(q) = q^2.$$

Les conditions (24.1) et (24.2) s'écrivent avec ces précisions (où on a $p'(q_A + q_B) = -0{,}5$) :

$$2q_A = 28 - 0{,}5(q_A + q_B) - 0{,}5q_A \tag{24.3}$$

$$2q_B = 28 - 0{,}5(q_A + q_B) - 0{,}5q_B. \tag{24.4}$$

De (24.3) on déduit :

$$q_A = \frac{28 - 0{,}5q_B}{3}.$$

La fonction de réaction de A, $r_A(\cdot)$, est donc définie par la formule :

$$r_A(q_B) = \frac{28 - 0{,}5q_B}{3}.$$

De même, on déduit de (24.4) la fonction de réaction de B, qui est telle que :

$$r_B(q_A) = \frac{28 - 0{,}5q_A}{3}.$$

Les quantités d'équilibre sont obtenues en résolvant le système de deux équations à deux inconnues formé par les conditions (24.3) et (24.4). Ce qui est aisé ici, car c'est un système linéaire. On obtient :

$$(q_A^*, q_B^*) = (8,8).$$

Chacun des duopoleurs offre huit unités du bien, le prix égalisant l'offre et la demande globales étant :

$$p^* = 28 - 0{,}5(8 + 8) = 20.$$

La situation est décrite par la figure 24.1

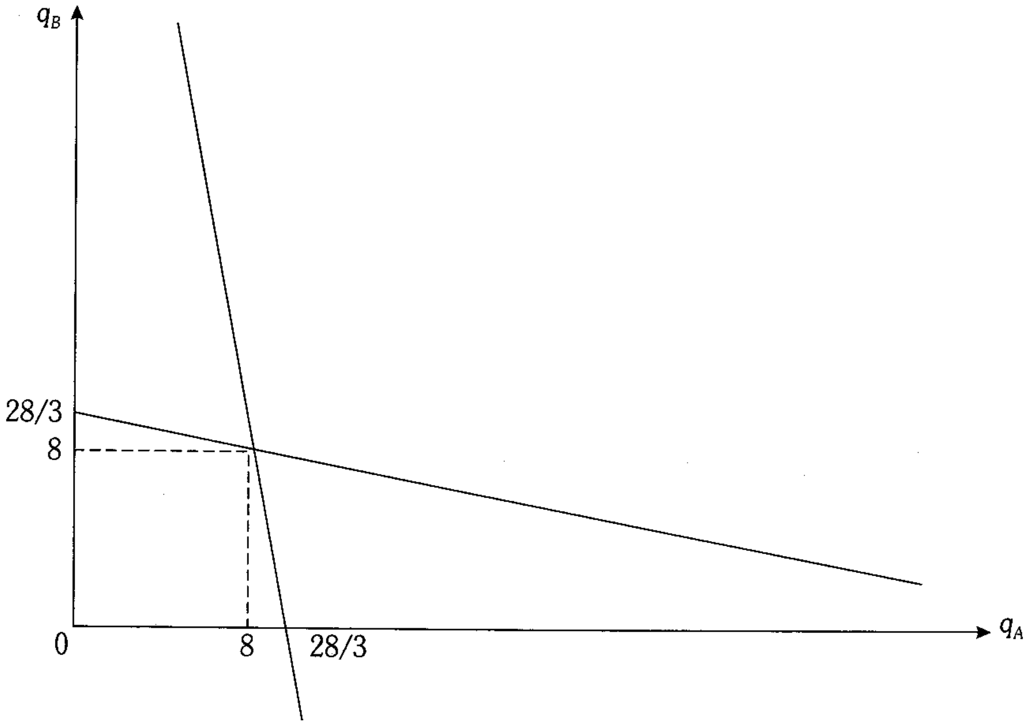

Figure 24.1

Si les deux entreprises se concertaient de façon à agir comme un monopole, alors leurs offres seraient telles qu'elles maximiseraient le *profit total* :

$$p(q_A + q_B) \times (q_A + q_B) - c_A(q_A) - c_B(q_B),$$

qui est, ici, égal à :

$$(30 - 0{,}5(q_A + q_B)) \times (q_A + q_B) - q_A{}^2 - q_B{}^2.$$

Les offres $\overline{q}_A$ et $\overline{q}_B$ qui maximisent cette expression annulent ses dérivées par rapport à q_A et q_B (condition du premier ordre). Elles sont donc solution du système de deux équations à deux inconnues :

$$- 0{,}5(qA + qB) + (30 - 0{,}5(qA + qB)) - 2qA = 0$$
$$- 0{,}5(qA + qB) + (30 - 0{,}5(qA + qB)) - 2qB = 0$$

Cette solution est :

$$\overline{q}_A = 7{,}5,\ \overline{q}_B = 7{,}5,$$

le prix d'équilibre étant : $\overline{p} = 20{,}5$.

Les quantités produites seraient donc inférieures à ce qu'elles sont dans le cas où les entreprises ne se concertent pas, et le prix serait plus élevé. En revanche, le profit, égal à 194,25 (= $20{,}5 \times 15 - (7{,}5)^2 - (7{,}5)^2$), est supérieur à la somme des profits des entreprises lorsqu'elles agissent séparément (profit total égal à $20 \times 16 - 8^2 - 8^2 = 192$).

II Le duopole de Stackelberg

Le modèle de Stackelberg se distingue de celui de Cournot par *l'information* dont dispose un des duopoleurs. Plus précisément, il suppose que le duopoleur A, par exemple, connaît la fonction de coût et la forme des conjectures de B ; ce qui lui permet de calculer la fonction de réaction de B, et de faire une offre qui en tient compte, de façon à maximiser son profit. On dit qu'en raison de l'avantage qu'il détient au niveau de l'information, il joue le rôle de *meneur*, B se contentant de « suivre ».

A détermine son offre en appliquant la règle de maximisation du profit qui consiste à égaliser le coût marginal à la recette marginale. Ce qui s'écrit ici (en remplaçant dans (24.1) q_B par $r_B(q_A)$) :

$$c_A'(q_A) = [q_A\, p(q_A + r_B(q_A))]'.$$

D'où :

(24.5) $$c_A'(q_A) = p(q_A + r_B(q_A)) + q_A \times p'(q_A + r_B(q_A)) \times (1 + r_B'(q_A)).$$

C'est une équation qui n'a qu'une seule inconnue : q_A. Sa solution q_A^* donne l'offre de A, celle de B étant $r_B(q_A^*)$. Ces offres sont, évidemment, d'équilibre, puisque A choisit la sienne en connaissant la fonction de demande et en anticipant correctement l'offre que va faire B.

APPLICATION

On reprend l'application précédente (modèle de Cournot), en remplaçant dans (24.5) (condition de profit maximum pour A) q_B par $r_B(q_A)$, donc par $(28 - 0{,}5q_A)/3$. On obtient l'équation en q_A :

$$2q_A = 28 - 0{,}5(q_A + \frac{28 - 0{,}5q_A}{3}) - 0{,}5q_A \frac{2{,}5 \times 2{,}5}{3 \times 3},$$

qui a pour solution :

$$q_A{}^s = 8{,}14.$$

L'offre de B, $r_B(q_A{}^s)$, est donc :

$$q_B{}^s = r_B(8{,}14) = 7{,}96.$$

III Le duopole de Bertrand

Dans le duopole de Bertrand, on suppose que les duopoleurs proposent un prix pour le bien qu'ils produisent, ce qui change radicalement la nature des modèles étudiés jusqu'à présent. En effet, il suffira alors qu'un duopoleur affiche un prix inférieur (même « très légèrement ») à celui de l'autre duopoleur pour que toute la demande se reporte sur lui. Il n'y aura donc pas équilibre, le duopoleur avec le prix plus élevé ayant intérêt à baisser son prix en-dessous de celui de son concurrent (même « très légèrement »), de façon à récupérer toute la demande. C'est la « guerre des prix », qui peut ne jamais s'arrêter (pas d'équilibre). Dans le modèle proposé par Bertrand, un certain nombre d'hypothèses très particulières permet néanmoins de désigner un équilibre. Ces hypothèses sont, pour l'essentiel :

- un coût unitaire constant ;
- des capacités de production telles que chaque duopoleur peut servir toute la demande lorsque le prix est égal au coût unitaire.

En effet, dans ce cas, si chacun des duopoleurs affiche un prix égal au coût unitaire, alors il y a équilibre, car aucun n'a intérêt à baisser son prix – celui qui le ferait produirait à perte –, ni à l'augmenter – celui qui le ferait ne trouverait aucun acheteur. Toutefois, cet équilibre est peu satisfaisant, car les duopoleurs y font un profit nul (pourquoi produire alors ?), et le partage entre eux de la production est indéterminé.

Toutes ces difficultés, même dans un modèle aussi simple, expliquent pourquoi l'hypothèse selon laquelle les agents sont des preneurs de prix occupe une place aussi centrale en microéconomie.

25 Éléments de théorie des jeux

La théorie des jeux se propose d'analyser les situations où des individus rationnels prennent des décisions en étant conscients de leurs interactions (les gains de chacun dépendent des décisions des autres). Comme la microéconomie analyse aussi des situations de ce type, elle est englobée dans la théorie des jeux ; autrement dit, tout modèle microéconomique peut être représenté sous la forme d'un « jeu », dont les ingrédients de base sont :

- un ensemble d'individus (les « joueurs ») qui prennent des décisions dans le but de maximiser leur gain (ou de minimiser leur coût) ;
- des ensembles – un par joueur – dans lesquels les joueurs font leurs choix ; on appelle *stratégies* les éléments de ces ensembles ;
- des gains associés à chacune des issues du jeu – résultats des décisions (simultanées) des joueurs.

Ainsi, le modèle de concurrence parfaite (*cf.* fiche 6) peut être envisagé comme un jeu dont les joueurs sont les ménages et les entreprises (stratégies : quantités offertes et demandées ; gains : utilité ou profit) et le commissaire-priseur (stratégies : prix ; gains : valeur des demandes nettes, hors numéraire).

Un jeu est aussi caractérisé par des *règles*, qui stipulent notamment l'ordre dans lequel les joueurs interviennent (lorsque le jeu comporte plusieurs coups).

I Les diverses formes de représenter un jeu

Il existe deux façons de représenter un jeu :

- la *forme stratégique* (ou *normale*), qui se présente – si possible – sous la forme d'un tableau. Dans cette représentation, les stratégies des joueurs apparaissent explicitement (en tête des lignes et des colonnes du tableau) ; d'où son nom. La forme stratégique est la plus appropriée pour décrire les jeux à un seul coup, où les stratégies des joueurs se réduisent à une seule action.

APPLICATION

Le tableau 25.1 représente un jeu sous forme stratégique, dans lequel le joueur A dispose des trois actions (stratégies) a_1, a_2, a_3, le joueur B ayant à opter entre les quatre actions (stratégies), b_1, b_2, b_3, b_4, les couples de nombres à l'intersection de la *i-ème* ligne et de la *j-ème* colonne du tableau donnant, dans l'ordre, les gains de A et de B (ainsi, si A opte pour a_1 et B pour b_3, alors A obtient 2 et B, 4).

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(4,8)	(7,3)	(2,4)	(10,2)
a_2	(3,4)	(6,7)	(1,6)	(9,8)
a_3	(5,3)	(6,4)	(3,5)	(8,4)

Tableau 25.1

– la *forme séquentielle* (ou *extensive*), où le jeu est représenté par un arbre, formé de branches – qui correspondent à des actions –, et de nœuds – où les joueurs optent pour les actions représentées par les branches. La forme séquentielle est la plus appropriée pour décrire un jeu à plusieurs coups, les règles du jeu précisant le tour auquel chacun intervient (à chaque tour correspond un nœud de l'arbre).

APPLICATION

L'arbre de la figure 25.1 décrit un jeu où A doit choisir entre les trois actions, a_1, a_2, a_3, B ayant à opter entre les deux actions, b_1 et b_2. Les gains des joueurs sont représentés par des vecteurs (écrits à l'extrémité des dernières branches de l'arbre), dont les éléments sont classés selon l'ordre d'intervention des joueurs. Ainsi, si A opte pour a_1 et B pour b_2, alors les gains sont de 5 pour A et de 8 pour B.

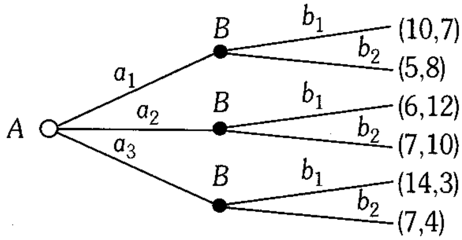

Figure 25.1

Dans cet exemple, les stratégies de A sont confondues avec ses actions. Tel n'est pas le cas pour B, qui doit prendre en compte le fait qu'il intervient après A : ses stratégies se présentent comme des listes d'instructions qui précisent ce qu'il fait (ou ferait) dans toutes les éventualités possibles. Elles sont donc représentées par des vecteurs de la forme (b_i, b_j, b_k), ce qui signifie : si A opte pour a_1, alors B opte pour b_i (i = 1,2) ; si A opte pour a_2, alors B opte pour b_j (j = 1,2) ; si A opte pour a_3, alors B opte pour b_k (k = 1,2). Comme il y a $2^3 = 8$ vecteurs de ce type, il s'ensuit que B a ici le choix entre huit stratégies (pour deux actions).

II Règles du jeu et information

Si les stratégies prennent, dans les jeux à plusieurs coups, la forme (plutôt étrange) de listes d'instructions – pour insister sur ce point, on les qualifie souvent de *stratégies conditionnelles* –, c'est en raison même du but de la théorie des jeux, qui est de réfléchir sur des situations où des individus rationnels en interaction prennent des décisions. Or, la rationalité – ici, la recherche par chacun d'un gain maximum – suppose la prise en compte de toute l'information disponible. Une des hypothèses fondamentales de la théorie des jeux est que les participants « savent tout » sur les caractéristiques du jeu (gains dans les diverses éventualités) et des joueurs (rationalité, forme de leur relation de préférence, de leur fonction de profit,etc.), éventuellement à un facteur aléatoire près (dont la loi est néanmoins connue de tous). C'est l'hypothèse d'*information complète* (*information incomplète* lorsqu'il y a un facteur aléatoire). Il découle de cette hypothèse que chaque joueur peut se mettre à la place du modélisateur, et raisonner comme lui, à partir de l'arbre représentant le jeu (si celui-ci est à plusieurs coups). Il peut alors décider de ce qu'il fera à chaque nœud de l'arbre où il est concerné : d'où la « liste d'instructions » résultant de cette décision. Cette liste est transmise à un « arbitre », qui la confronte à celles qui lui sont données par les autres joueurs, et détermine l'issue du jeu (les gains de chacun). Par conséquent, même dans les jeux séquentiels, les choix des individus sont simultanés (et en une seule fois), comme dans les jeux à un seul coup ; seul change l'ensemble sur lequel portent ces choix (listes d'instructions au lieu d'une action unique). Il est donc possible de représenter ces jeux sous forme stratégique, représentation où le caractère simultané des choix apparaît clairement.

APPLICATION

Le jeu séquentiel représenté par l'arbre de la figure 25.1 peut être mis sous la forme stratégique donnée dans le tableau 25.2, qui se lit, par exemple, de la façon suivante : si A opte pour l'action (stratégie) a_2, et B pour la stratégie (conditionnelle) (b_1, b_2, b_1), alors le vecteur de gains est celui qui résulte de l'action a_2, suivie de l'action b_2 ; c'est donc (7,10). Ou encore : si A opte pour a_1 et B pour (b_2, b_1, b_2), alors le vecteur de gains est celui qui résulte de l'action a_1, suivie de l'action b_2 ; c'est donc (5,8).

A \ B	(b_1, b_1, b_1)	(b_1, b_1, b_2)	(b_1, b_2, b_1)	(b_1, b_2, b_2)	(b_2, b_1, b_1)	(b_2, b_1, b_2)	(b_2, b_2, b_1)	(b_2, b_2, b_2)
a_1	(10,7)	(10,7)	(10,7)	(10,7)	(5,8)	(5,8)	(5,8)	(5,8)
a_2	(6,12)	(6,12)	(7,10)	(7,10)	(6,12)	(6,12)	(7,10)	(7,10)
a_3	(14,3)	(7,4)	(14,3)	(7,4)	(14,3)	(7,4)	(14,3)	(7,4)

Tableau 25.2

De même, un jeu sous forme stratégique peut être représenté par un arbre. Ainsi, la figure 25.2a donne l'arbre correspondant au jeu décrit dans le tableau 25.1, le « ballon » englobant les nœuds où B doit prendre une décision étant appelé *ensemble d'informa-*

tion (*B* sait seulement que l'un des deux nœuds inclus dans ce ballon a été choisi par *A*, mais il ne sait pas lequel).

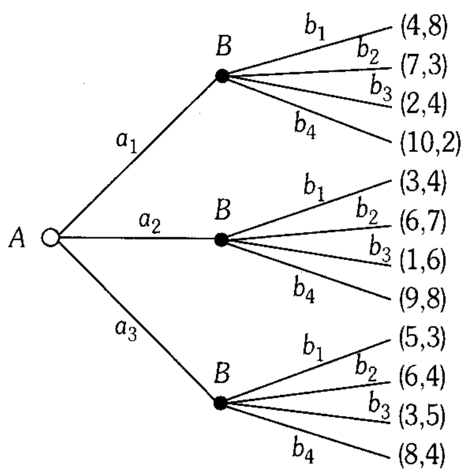

Figure 25.2a

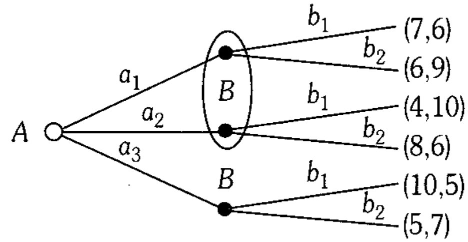

Figure 25.2b

La figure 25.2b décrit un jeu séquentiel où les règles sont telles que si *A* opte pour a_1 ou a_2, *B* sait seulement qu'il a choisi l'une ou l'autre de ces actions (et donc pas a_3), mais il ignore laquelle des deux. *B* a donc le choix entre quatre stratégies, de la forme (b_i, b_j), b_i désignant l'action retenue dans le cas où A opte pour a_1 ou a_2, b_j désignant l'option retenue par *B* lorsque *A* opte pour a_3. Ce jeu a donc pour forme stratégique :

A \ *B*	(b_1, b_1)	(b_1, b_2)	(b_2, b_1)	(b_2, b_2)
a_1	(7,6)	(7,6)	(6,9)	(6,9)
a_2	(4,10)	(4,10)	(8,6)	(8,6)
a_3	(10,5)	(5,7)	(10,5)	(5,7)

Tableau 25.3

III Concepts de solution

Un jeu, au sens de la théorie des jeux, décrit une situation dans laquelle interagissent des individus dont les intérêts sont souvent opposés. Ce qui peut être une « solution » (par exemple, maximisation des gains) pour l'un ne l'est donc généralement pas pour les autres. C'est pourquoi on ne peut parler de « la solution » d'un jeu comme on le fait, par exemple, à propos d'un système d'équations. Toutefois, parmi les issues possibles d'un jeu, il y en a qui se distinguent des autres en raison de telle ou telle propriété, ou caractéristique, que le modélisateur privilégie en définissant des *concepts de solution*. Parmi ceux-ci, on trouve les issues rationalisables – obtenues par élimination des stratégies dominées – et l'équilibre de Nash.

A. Élimination (itérative) des stratégies dominées

Une stratégie s d'un joueur est *dominée* par une stratégie *s'* de ce même joueur si le choix de *s'* lui procure un gain supérieur à celui que lui procure le choix de s, *quel que soit le choix fait par les autres joueurs*. Par conséquent, un joueur rationnel n'opte jamais (ou ne devrait jamais opter) pour une stratégie dominée. Si on élimine une stratégie dominée, on « réduit la taille » du jeu (par exemple, en enlevant un ligne ou une colonne du tableau qui le représente sous forme stratégique). Si dans le jeu ainsi réduit, des stratégies sont dominées – même si elles ne le sont pas dans le tableau initial –, alors on les élimine, et ainsi de suite. Si l'application de cette démarche itérative conduit à une seule issue, alors on peut dire que celle-ci est « la » solution du jeu, conséquence de l'application stricte du principe de rationalité (en information complète, y compris en ce qui concerne la rationalité des autres).

APPLICATIONS

1. Considérons le jeu décrit dans le tableau 25.1. On constate que la stratégie a_1 domine la stratégie a_2 (puisque $4 > 3$, $7 > 6$, $2 > 1$, $10 > 9$). Comme *B* sait que *A* est rationnel, il s'attend à ce qu'il ne choisisse pas a_2, et considère donc le jeu réduit suivant :

B / A	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(4,8)	(7,3)	(2,4)	(10,2)
a_3	(5,3)	(6,4)	(3,5)	(8,4)

Tableau 25.4

Comme, maintenant, les stratégies b_2 et b_4 sont dominées (par b_3), *B* ne devrait pas les choisir (s'il est rationnel). Or, *A* sait cela (puisqu'il sait que *B* est rationnel, et que *B* sait que lui-même l'est) ; il s'attend donc à ce que *B* opte pour b_1 ou b_3, et raisonne sur le jeu (encore plus) réduit suivant :

B / A	b_1	b_3
a_1	(4,8)	(2,4)
a_3	(5,3)	(3,5)

Tableau 25.5

dans lequel a_1 est dominée. *B* sait cela, et s'attend donc à ce que *A* choisisse a_3 ; ce qui le conduit à opter pour b_3. Le jeu comporte donc une solution unique : $\{a_3, b_3\}$, obtenue par application du seul principe de rationalité (y compris l'attente par chacun que l'autre agisse rationnellement).

On notera, et c'est là un point très important, que cette solution n'est pas optimale (au sens de Pareto, *cf.* fiche 21), puisque les combinaisons $\{a_2, b_4\}$, $\{a_2, b_2\}$ et $\{a_1, b_1\}$ rapportent plus aux deux joueurs. Ainsi, l'interaction de comportements rationnels individuels peut avoir pour résultat une issue qui n'est pas « collectivement rationnelle » (au sens où il existe au moins une autre issue procurant un gain strictement supérieur à chacun des joueurs).

2. Dans le jeu décrit par l'arbre de la figure 25.1, l'application du principe de rationalité (en information complète) permet de proposer une solution au jeu ; pour la trouver, on raisonne « à rebours », à partir du dernier coup, qui est le fait de B. En effet, le choix de celui-ci est alors « évident » : b_2 si A a opté (au coup précédent) pour a_1, b_1 si A a opté (au coup précédent) pour a_2, b_2 si A a opté (au coup précédent) pour a_3 (autrement dit, B opte pour la stratégie (b_2, b_1, b_2)). Sachant cela, A ne peut opter que pour a_3 ; comme B opte dans ce cas pour b_2, les gains sont donc donnés par le couple (7,4). On notera, d'une part, que, comme dans l'exemple précédent, la solution retenue n'est pas optimale au sens de Pareto (si A avait opté pour a_1 et B pour b_1, les gains auraient été donnés par le couple (10,7), supérieur à (7,4)) ; d'autre part, que la méthode de raisonnement à rebours appliquée à l'arbre n'est rien d'autre que celle d'élimination (par itération) des stratégies dominées, comme on le voit en raisonnant sur la forme stratégique du jeu (tableau 25.2). On constate alors que la stratégie (b_2, b_1, b_2) domine toutes les autres, la solution par élimination des stratégies dominées étant :

$$\{a_3, (b_2, b_1, b_2)\}.$$

B. Issues rationalisables

Le concept de solution consistant à éliminer les stratégies dominées permet rarement de désigne une solution unique (hormis le cas des jeux à plusieurs coups dans lesquels les ensembles d'information se réduisent à un seul nœud, cas où le raisonnement à rebours dégage généralement cette solution). En fait, la plupart du temps, retenir ce concept de solution revient à accepter comme solution du jeu n'importe quelle combinaison de stratégies. D'où l'idée d'imposer des conditions supplémentaires ; celle qui vient en premier est de ne retenir que les stratégies dites *rationalisables*, car n'étant pas en contradiction avec le principe de rationalité. Un exemple permet de comprendre ce qu'il en est.

APPLICATION

Soit le jeu sous forme stratégique :

A \ B	b_1	b_2	b_3
a_1	(0,6)	(1,1)	(3,4)
a_2	(1,1)	(2,2)	(1,0)
a_3	(6,5)	(0,1)	(1,6)

Tableau 25.6

Le choix de a_1 peut-il être justifié, du point de vue de la rationalité ? Oui, si A pense que B va choisir b_3. Mais ce choix peut-il être justifié ? Oui, si B pense que A va choisir a_3. Ce qui est justifié si A pense que B va choisir b_1, ce qui est à son tour justifié si B pense que A va choisir a_1 : on est revenu au point de départ, le raisonnement pouvant se poursuivre, indéfiniment. Autrement dit : le choix de a_1 ne peut être rejeté en invoquant la rationalité. Il en est de même pour a_3, ainsi que pour b_1 et pour b_3, car ils font partie de la « boucle » montrant que a_1 est rationalisable.

Restent a_2 et b_2. Comme A choisit a_2 s'il pense que B va choisir b_2, et comme B fait ce choix s'il pense que A va choisir a_2, ces deux stratégies sont aussi rationalisables.

Ainsi, comme toutes les stratégies sont rationalisables, n'importe quelle combinaison d'un a et d'un b est solution du jeu, si le concept de solution est la « rationalisabilité » (il y a donc 9 solutions, selon ce concept).

C. L'équilibre de Nash

Parmi les stratégies rationalisables, on considère seulement celles qui sont basées sur des croyances « correctes », ou « justes ». Ainsi, dans l'exemple précédent, tel est le cas de a_2, pour A, et de b_2, pour B. La combinaison de ces deux stratégies constitue, par définition, un équilibre de Nash. Ainsi, un *équilibre de Nash* est une combinaison de stratégies – une par joueur – telle que chacun maximise son gain, compte tenu du choix des autres (qui a été correctement anticipé). Un équilibre de Nash n'est pas forcément un optimum de Pareto ; ainsi, dans notre exemple, l'équilibre de Nash procure les gains (2,2), alors que les combinaisons $\{a_1, b_3\}$ et $\{a_3, b_1\}$ procurent des gains strictement supérieurs aux deux joueurs.

Si le choix de l'équilibre de Nash en tant que concept de solution permet de restreindre le nombre de solutions du modèle, rien ne garantit qu'il en aie une seule, comme dans notre exemple.

Ainsi, les deux jeux simples suivants – dits « de coordination » – comportent chacun deux équilibres de Nash :

A \ B	b_1	b_2
a_1	(2,1)	(0,0)
a_2	(0,0)	(1,2)

Tableau 25.7a

A \ B	b_1	b_2
a_1	(0,0)	(2,1)
a_2	(1,2)	(0,0)

Tableau 25.7b

Dans ces jeux, les joueurs ont intérêt à « se coordonner » sur les équilibres de Nash, mais chacun a un équilibre qu'il préfère à l'autre (dans le premier jeu : $\{a_1, b_1\}$ pour A, $\{a_2, b_2\}$ pour B ; dans le second jeu : $\{a_1, b_2\}$ pour A, $\{a_2, b_1\}$ pour B). La théorie des jeux ne peut qu'attirer l'attention sur le problème, sans proposer de façon de le résoudre (à son niveau, il est insoluble).

26 Annexe mathématique

Le propos de cette fiche est de donner les principaux concepts et résultats mathématiques qui sont utilisés dans les fiches précédentes.

Comme le microéconomiste, on va raisonner, pour l'essentiel, sur des fonctions de deux variables.

I La dérivation

A. La notion de dérivée partielle

Soit une fonction $f(\cdot)$ qui fait correspondre au couple (x_1, x_2) le nombre réel $f(x_1, x_2)$. On appelle *dérivée partielle de $f(\cdot)$ par rapport à x_1, en (x_1, x_2)*, la limite du rapport :

$$\frac{f(x_1 + \Delta x, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x},$$

lorsque Δx tend vers 0. On note cette limite $f'_{x_1}(x_1, x_2)$ ou $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

On définit de la même façon la dérivée partielle de $f(\cdot)$ par rapport à x_2, que l'on note :

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) \text{ ou } \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

On calcule les dérivées partielles d'une fonction par rapport à une variable en faisant comme si elle était fonction de cette seule variable, les autres étant considérées comme des constantes.

EXEMPLE

Pour $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1/3x_2$, on a :

- $f'_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + \dfrac{1}{3x_2}$
- $f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1^2 - \dfrac{x_1}{3x_2^2}$

B. Dérivée d'une fonction de fonction

On généralise la formule de la dérivée d'une fonction de fonction d'une seule variable :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x),$$

au cas où il y en a deux (ou plus). Soit, si on pose $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$:

(26.1) $$F'(t) = f'_{x_1}(g_1(t), g_2(t)) \times g'_1(t) + f'_{x_2}(g_1(t), g_2(t)) \times g'_2(t).$$

C'est la règle de *dérivation en chaîne* puisqu'on dérive successivement (« en chaîne ») les fonctions concernées. Le second membre de (26.1) est obtenu en faisant la somme de termes, relatifs à chacune des variables de $f(\cdot)$, qui ont la même forme – à quelques nuances près – que ceux de la formule pour une seule variable.

C. Dérivée d'une fonction implicite

Une fonction implicite est une fonction définie par une égalité de la forme :

$$f(x_1, x_2) = c \qquad \text{(équation d'une courbe de niveau).}$$

Si on note $\varphi(\cdot)$ cette fonction, on a donc $x_2 = \varphi(x_1)$ et, par définition de $\varphi(.)$:

(26.2) $$f(x_1, \varphi(x_1)) = c.$$

Si, par exemple, $f(x_1, x_2) = x_1{}^2 x_2$, la fonction implicite définie par l'égalité $f(x_1, x_2) = c$ (qui s'écrit ici $x_1{}^2 x_2 = c$) est la fonction $\varphi(\cdot)$ telle que $\varphi(x_1) = c/x_1{}^2$.

Si on dérive par rapport à x_1 les deux membres de (26.2) (en appliquant à son membre de droite la formule (26,1), avec x_1 au lieu de t, $\varphi(\cdot)$ au lieu de $g_2(\cdot)$ et la fonction identité au lieu de $g_1(\cdot)$), il vient :

$$f'_{x_1}(x_1, \varphi(x_1)) + f'_{x_2}(x_1, \varphi(x_1)) \times \varphi'(x_1) = 0.$$

Et donc, si $f'_{x_2}(x_1, \varphi(x_1)) \neq 0$,

(26.3) $$\varphi(x_1) = -\frac{f'_{x_1}(x_1, \varphi(x_1))}{f'_{x_2}(x_2, \varphi(x_1))}.$$

Si on se situe en un point particulier (a_1, a_2), avec $f(a_1, a_2) = c$ (donc tel que $a_2 = \varphi(a_1)$), alors la formule (25.3) s'écrit :

(26.4) $$\varphi'(a_1) = -\frac{f'_{x_1}(a_1, a_2)}{f'_{x_2}(a_1, a_2)}.$$

La formule (26.4) donne la pente de la tangente en (a_1, a_2) à la courbe de niveau d'équation $f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2)$.

EXEMPLE

Supposons qu'on est en présence d'une fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par : $U(q_1, q_2) = q_1{}^{1/2} q_2 + q_1 q_2{}^{1/3}$, et qu'on s'intéresse à la courbe d'indifférence qui passe par le point (1,1) [cette courbe a donc pour équation : $U(q_1, q_2) = U(1,1)$ (= 2)]. On obtient la pente en (1,1) à cette courbe en appliquant la formule (26.4). Comme on a ici : $U'_{q_1}(q_1, q_2) = \frac{1}{2}q_1^{-1/2}q_2 + q_2^{1/3}$ et $U'_{q_2}(q_1, q_2) = q_1^{1/2} + \frac{1}{3}q_1q_2^{-2/3}$, il s'ensuit que :

$$\varphi'(1) = -\frac{U'_{q_1}(1,1)}{U'_{q_2}(1,1)} = -\frac{3/2}{4/3} = -\frac{9}{8}.$$

III La recherche d'extremums

A. Fonction dont les variables sont libres

Une fonction $f(\cdot)$ dérivable en un point $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est maximum ou minimum (localement) en ce point si ses dérivées partielles s'annulent en ce point, donc si :

$$f'_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \qquad i = 1,2.$$

C'est la *condition du premier ordre* pour avoir un extremum d'une fonction dérivable.

B. Fonction dont les variables sont soumises à une contrainte

Supposons maintenant que les variables de la fonction $f(\cdot)$ sont soumises à la contrainte : $g(x_1, x_2) = 0$. Celle-ci définit donc une fonction implicite $\varphi(\cdot)$ dont la dérivée en un point (x_1^*, x_2^*) qui vérifie la contrainte est (*cf.* formule (26.4)) :

$$\varphi'(x_1^*) = -\frac{g'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{g'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} \tag{26.5}$$

Les extremums de $f(\cdot)$ sous la contrainte $g(x_1, x_2) = 0$ sont donc ceux de la fonction $h(\cdot)$ de la seule variable x_1 définie par l'égalité : $h(x_1) = f(x_1, \varphi(x_1))$. Si (x_1^*, x_2^*) est un de ces extremums, alors on doit avoir (condition du premier ordre) : $h'(x_1^*) = 0$. Cette condition s'écrit, compte tenu de l'égalité $h(x_1) = f(x_1, \varphi(x_1))$ et de la formule (26.1) de dérivation en chaîne :

$$f'_{x_1}(x_1^*, \varphi(x_1^*)) + f'_{x_2}(x_1^*, \varphi(x_1^*)) \times \varphi'(x_1^*) = 0. \tag{26.6}$$

Comme (x_1^*, x_2^*) doit vérifier la contrainte, on a donc $x_2^* = \varphi(x_1^*)$. En outre, (26.5) donne $\varphi'(x_1^*)$; en remplaçant dans (26.6), il vient, finalement :

$$\frac{f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{g'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}. \tag{26.7}$$

C'est *la condition du premier ordre* dans le cas d'un extremum d'une fonction dont les variables sont soumises à une contrainte. Géométriquement, cette condition signifie que la courbe de niveau qui passe par le point donnant l'extremum (sous contrainte) est tangente en ce point à la courbe qui représente la contrainte.

C. Lagrangien et multiplicateurs de Lagrange

La condition (26.7) peut aussi s'écrire :

(26.8)
$$\frac{f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{g'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}{g'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}.$$

Si on appelle $-\lambda$ ces rapports, alors il découle de (26.8) – par un calcul élémentaire – que :

(26.9)
$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) + \lambda g'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) + \lambda g'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0. \end{cases}$$

Si on pose $L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$ – la fonction $L(\cdot)$ est appelée *lagrangien* du problème –, les égalités (26.9) s'écrivent :

(26.9)
$$\begin{cases} L'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ L'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0. \end{cases}$$

Le système (26.9) donne une autre façon d'exprimer la condition du premier ordre (26.8), semblable à celle où il n'y a pas de contrainte (à condition de remplacer $f(\cdot)$ par le lagrangien $L(\cdot)$, et donc en introduisant l'inconnue supplémentaire λ). Si on tient compte du fait que (x_1^*, x_2^*) vérifie la contrainte, on est en présence d'un système de trois inconnues [(26.9) plus la contrainte $g(x_1^*, x_2^*) = 0$], à trois inconnues (x_1^*, x_2^* et λ).

→ *Remarque*

La détermination des extremums sous contrainte se fait plus rapidement à partir de la condition d'« origine » (26.8). La version (26.9) de cette condition, plus lourde puisqu'elle comporte une variable en plus, n'a vraiment d'intérêt que si on va au-delà de la seule recherche des extremums d'une fonction dont les variables sont soumises à des contraintes. Intérêt qui apparaît, par exemple, avec le théorème de l'enveloppe, qui permet parfois de donner une interprétation économique aux multiplicateurs de Lagrange.

III Le théorème de l'enveloppe

Le théorème de l'enveloppe donne un moyen d'évaluer l'effet de (petites) variations des paramètres du modèle sur la valeur de la fonction extremum $F(\cdot)$, qui donne, par exemple, le maximum d'utilité ou de profit, pour des valeurs données des paramètres (les prix, par exemple).

Situons-nous dans le cas le plus simple, celui où on s'intéresse aux valeurs des variables x_1 et x_2 qui rendent maximum (ou minimum) la fonction-objectif $f(x_1, x_2, y)$, pour y donné (y joue le rôle d'un paramètre). On a donc, en raison de la condition du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, y) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, y) = 0. \end{cases}$$

Si ce système de deux équations à deux inconnues (les x) comporte une solution, celle-ci dépend forcément de y ; on la note $(x_1(y), x_2(y))$. En remplaçant dans le système ci-dessus, il vient :

$$(26.10) \qquad \begin{cases} f'_{x_1}(x_1(y), x_2(y), y) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1(y), x_2(y), y) = 0. \end{cases}$$

La condition (26.10) signifie que le point $(x_1(y), x_2(y))$ annule les dérivées de $f(\cdot, y)$, ce qui est la condition du premier ordre pour être un extremum de cette fonction. S'il l'est effectivement, alors la fonction $F(\cdot)$ définie par :

$$(26.11) \qquad F(y) = f(x_1(y), x_2(y), y),$$

donne la valeur maximum (ou minimum) prise par $f(\cdot, y)$, pour y donné. C'est la fonction extremum du problème. Si on dérive les deux membres de (26.11), il vient :

$$(26.12) \quad F'(y) = f'_{x_1}(x_1(y), x_2(y), y) \times x'_1(y) + f'_{x_2}(x_1(y), x_2(y), y) \times x'_2(y) + f'_y(x_1(y), x_2(y), y).$$

Mais, en raison de la condition du premier ordre (26.10), les deux premiers termes du membre de droite de (26.12) s'annulent. Cette formule se réduit donc à :

$$(26.13) \qquad F'(y) = f'_y(x_1(y), x_2(y), y).$$

C'est le *théorème de l'enveloppe*. Il nous dit que la variation (dérivée) du maximum, ou du minimum, de la fonction-objectif $f(\cdot, y)$, lorsque le paramètre y varie, est donnée par la dérivée partielle par rapport à y de cette fonction, calculée au point extremum.

Si les variables de $f(\cdot, y)$ sont soumises à une contrainte, on parvient, de la même façon, à une formule semblable à (26.13), dans laquelle on écrit, dans le membre de droite, la dérivée par rapport à y du *lagrangien* $L(\cdot)$. Le théorème de l'enveloppe s'écrit donc, dans ce cas (où $F(y)$ donne le maximum de $f(\cdot, y)$, sous contrainte) :

$$(26.14) \qquad F'(y) = L'_y(x_1(y), x_2(y), \lambda(y), y).$$

EXEMPLE 1 : CHOIX DU PRODUCTEUR ET LEMME DE HOTELLING

Le producteur en concurrence parfaite choisit le panier d'inputs (q_1, q_2) qui maximise son profit $\pi(q_1, q_2) = pf(q_1, q_2) - p_1, q_1 - p_2 q_2$. Les paramètres sont ici les prix des biens ; le profit maximum dépendant des valeurs prises par ceux-ci, on le note $\Pi(p, p_1, p_2)$. La fonction $\pi(\cdot)$ joue le rôle de la fonction $F(\cdot)$ de la formule (26.13) du théorème de l'enveloppe. Si on lui applique cette formule, en faisant jouer à p le rôle de y, on obtient – après avoir remarqué que la dérivée de $\pi(q_1, q_2)$ par rapport à p est $f(q_1, q_2)$ – le *lemme de Hotelling*:

$$\Pi'_p(p, p_1, p_2) = f(q_1(p, p_1, p_2), q_2(p, p_1, p_2)).$$

L'effet sur le profit maximum d'une (« petite ») variation du prix de l'output est égal à la quantité produite d'output, aux prix donnés, multipliée par cette variation de prix (on rappelle qu'il résulte de la définition de la dérivée que $\Delta\pi \approx \pi'_n \times \Delta p$).

EXEMPLE 2 : CHOIX DU CONSOMMATEUR ET UTILITÉ MARGINALE DU REVENU

Le consommateur en concurrence parfaite choisit un panier de biens (q_1, q_2) qui maximise son utilité compte tenu de sa contrainte budgétaire. Les variables du modèle sont donc les quantités q, les paramètres étant le revenu R et les prix p. Comme le panier choisi – la demande du consommateur – dépend des prix et du revenu, on le note $(q_1(p_1, p_2, R),\ q_2(p_1, p_2, R))$. Ce panier procurant au consommateur une utilité maximum aux prix p_1 et p_2, et au revenu R, la fonction $V(\cdot)$ définie par l'égalité $V(p_1, p_2, R) = U(q_1(p_1, p_2, R),\ q_2(p_1, p_2, R))$ et appelée *fonction d'utilité indirecte*, joue le rôle de la fonction-extremum $F(\cdot)$ du théorème de l'enveloppe. On va appliquer, successivement, la formule 26.14 de ce théorème aux paramètres du modèle, le revenu R et les prix p, le lagrangien étant ici :

(26.15) $$U(q_1, q_2) + \lambda(R - p_1q_1 - p_1q_1).$$

• **Cas du revenu R :** la dérivée du lagrangien (26.15) par rapport à R étant égale à λ, il résulte de la formule (26.14) que la dérivée par rapport à R de la fonction-extremum $V(\cdot)$ est égale à la valeur de λ lorsque le revenu est R et les prix, p_1 et p_2 (soit $V'_R(p_1, p_2, R) = \lambda(p_1, p_2, R)$). C'est pourquoi on dit que le multiplicateur de Lagrange représente *l'utilité marginale du revenu*.

• **Cas de l'un des prix p_i (i = 1 ou 2) :** la dérivée du lagrangien (26.15) par rapport à p_i étant égale à $-\lambda q_i$, il résulte de la formule (26.14) du théorème de l'enveloppe que :

(26.16) $$V'_{p_i}(p_1, p_2, R) = -\lambda(p_1, p_2, R) \times q_i(p_1, p_2, R) \qquad i = 1{,}2.$$

Or, comme on a vu, en (i), que $\lambda(p_1, p_2, R) = V'_R(p_1, p_2, R)$, en remplaçant dans (26.16) on obtient l'identité de Roy :

$$q_i(p_1, p_2, R) = -\frac{V'_{p_i}(p_1, p_2, R)}{V'_R(p_1, p_2, R)}, \qquad i = 1{,}2.$$

Ainsi, la fonction de demande d'un bien peut s'obtenir à partir des dérivées de la fonction d'utilité indirecte.

EXEMPLE 3 : REVENU COMPENSÉ ET LEMME DE SHEPHARD

Les demandes compensées $(q_1{}^c(p_1, p_2, u),\ q_2{}^c(p_1, p_2, u))$ (*cf.* fiche 9) sont les solutions du programme : *trouver le panier (q_1, q_2) qui minimise la dépense $p_1q_1 + p_2q_2$ sous la contrainte $U(q_1, q_2) = u$*, programme dont le lagrangien est :

(26.17) $$p_1q_1 + p_2q_2 + \lambda(u - U(q_1, q_2)),$$

et dont la fonction-extremum $F(\cdot)$ est le revenu compensé : $R^c(p_1, p_2, u) = p_1q_1{}^c(p_1, p_2, u) + p_2q_2{}^c(p_1, p_2, u)$. Si on applique la formule (26.14) du théorème de l'enveloppe au paramètre p_i, i = 1 ou 2, on obtient – après avoir remarqué que la dérivée du lagrangien (26.17) par rapport à p_i est q_i – le *lemme de Shephard*:

$$(R^c)'_{p_i}(p_1, p_2, u) = q_i(p_1, p_2, u), \qquad i = 1{,}2.$$

Tous ces résultats demeurent valables lorsqu'il y a n biens, leur démonstration étant identique que dans le cas où $n = 2$.

IV Ensembles convexes. Fonctions convexes, fonctions concaves

A. Segments de droite et ensembles convexes

Étant donné deux points, A et B, tout point du segment de droite joignant A à B est obtenu en ajoutant au point A une fraction, comprise entre 0 et 1, du segment joignant A à B. Autrement dit, il est de la forme :

(i) $$A + \theta(B - A), \qquad \text{avec } \theta \in [0,1].$$

Si on permute les rôles de A et de B dans cette formule, on obtient une autre façon d'exprimer les points de ce segment :

(ii) $$B + \lambda(A - B), \qquad \text{avec } \lambda \in [0,1].$$

Cette dernière égalité peut aussi se mettre sous la forme :

(iii) $$\lambda A + (1 - \lambda)B, \qquad \text{avec } \lambda \in [0,1].$$

On a donc trois façons, équivalentes, (i), (ii) et (iii), d'exprimer les points du segment de droite joignant deux points A et B quelconques.

Lorsqu'un ensemble contient le segment de droite joignant deux quelconques de ses points, on dit qu'il est *convexe*. Tel est le cas, par exemple, d'un intervalle de $I\!R$, d'un cercle (ou d'une boule), d'un triangle, d'un trapèze. Mais un ensemble ayant la forme d'une banane, par exemple, n'est pas convexe.

B. Fonction convexe

Une fonction $f(\cdot)$ sur une partie convexe D de son ensemble de départ est convexe si le segment de droite joignant deux quelconques de ses points de son graphe se trouve *au-dessus* de ce graphe. Si on se sert, par exemple, de la forme (iii) pour représenter un segment de droite, alors cette définition s'écrit, plus formellement :

$$f(\cdot) \text{ convexe sur } D \Leftrightarrow \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B) \geqslant f(\lambda A + (1 - \lambda)B),\ \forall A \in D,\ \forall B \in D,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Ce que décrit la figure 26.1*a*.

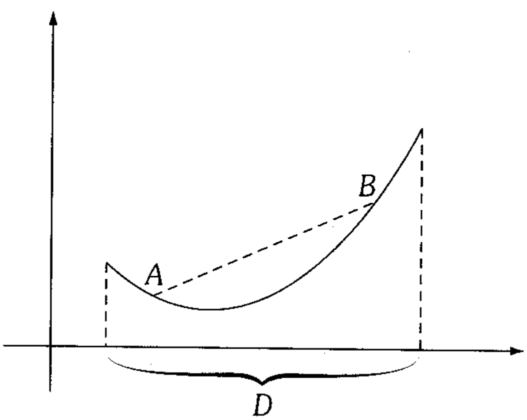

Figure 26.1*a*

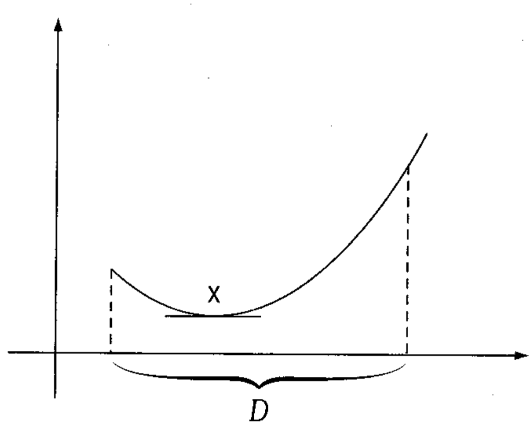

Figure 26.1*b*

Une propriété essentielle, pour le microéconomiste, des fonctions convexes est que si $f(\cdot)$ est dérivable sur D, alors la condition du premier ordre, $f'_{x_i}(X^*) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, suffit pour dire que X^* est un minimum de $f(\cdot)$ sur D. Soit : $f(\cdot)$ dérivable et convexe sur D, et, $f'_{x_i}(X^*) = 0$, $i = 1, \ldots, n$; $\Rightarrow X^*$ est un minimum de $f(\cdot)$ sur D.

Cette propriété est illustrée dans la figure 26.1*b*.

Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, admettant une dérivée d'ordre 2, alors on a le critère simple suivant pour savoir si elle est convexe :

$$f''(\cdot) \geqslant 0 \text{ sur } D \Leftrightarrow f(\cdot) \text{ convexe sur } D.$$

C. Fonction concave

Une fonction $f(\cdot)$ est concave sur D si sa fonction opposée, $-f(\cdot)$, est convexe sur D. Une fonction concave est donc telle que le segment joignant deux points quelconques de son graphe se trouve *en-dessous* de ce graphe, comme dans l'exemple décrit dans la figure 26.2*a*.

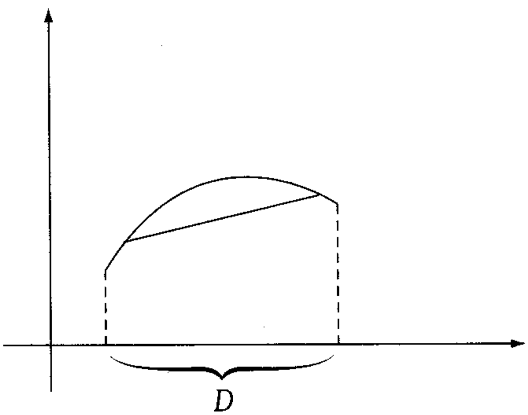

Figure 26.2*a*

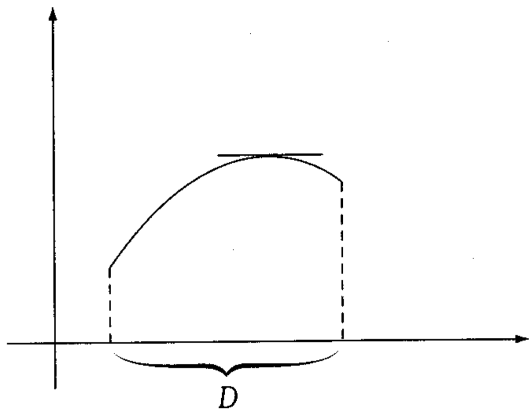

Figure 26.2*b*

On déduit de la définition même d'une fonction concave en tant que réciproque d'une fonction convexe les deux propriétés suivantes :

$f(\cdot)$ dérivable et concave sur D, et, $f'_{x_i}(X^*) = 0$, $i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow X^* \text{ est un maximum de } f(\cdot) \text{ sur } D.$$

La figure 26.2*b* illustre cette propriété.

Si $f''(\cdot)$ existe sur D, alors on a :

$$f''(\cdot) \geqslant 0 \text{ sur } D \Leftrightarrow f(\cdot) \text{ concave sur } D.$$

Index

Les chiffres indiqués renvoient aux numéros des pages.

E

F - G - H

I - J - K

L - M - N

O - P