LES MANUSCRITS MATHEMATIQUES DE MARX

Présentation d'Alain Alcouffe
Economica 1985

NB Les manuscrits de Marx ne sont pas disponibles ici.
On peut les trouver **là** en anglais.

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR

Dans son discours lors de l'enterrement de Marx, Engels signalait l'existence de travaux mathématiques de son ami. Pourtant, maigre des allusions et des mentions à différentes époques, il a été pratiquement impossible d'avoir une idée de ces manuscrits avant 1968, et leur publication - dans une présentation bilingue allemand-russe - par une équipe de l'Institut Marx-Engels-Lénine de Moscou dirigée par Mme S. Janovskaja. Cette édition - un fort volume de 640 pages - comportait deux parties; la première occupait tes 211 premières pages de l'ouvrage et concernait un travail de Marx sur le calcul différentiel ; la seconde partie décrit les cahiers de notes laissés par Marx et en reproduit certains passages (Marx, selon son habitude, alternait notes de lectures et exposes plus originaux comportant souvent de multiples versions). Cette édition russe était accompagnée d'une présentation importante de Mme Janovskaja et d'un appareil critique substantiel. Malheureusement, l'accès à l'édition russe était difficile (sans parler de la barrière linguistique) en raison de la diffusion restreinte des livres russes. Le contenu de cette édition fut mieux connu grâce a une traduction allemande en 1969 de la présentation originale de Mme Janovskaja dans une revue de RDA et par la publication en 1974 d'une reproduction des textes allemands (la première partie de l'édition russe, les travaux sur le calcul différentiel) par l'éditeur Scriptor (RFA). Cette «première édition allemande» étau accompagnée d'une importante introduction et d'un commentaire plus bref de M. Endemann. Enfin, alors que nous recherchions au British Museum certaines sources de Marx, est parue une édition anglaise, reprenant la première partie de l'édition russe (comme l'édition allemande), mais aussi l'appareil critique complété par différents articles dont un commentaire original de C. Smith.

Pour réaliser cette publication française, nous avons retenu. comme les éditions allemande et anglaise, les travaux de Marx sur le calcul différentiel (page 113 a 233). Nous avons repris les notes de l'édition russe qui suivent les calculs de Marx, pas a pas, (page 234 a page 249) ainsi que les «commentaires» du M. Endemann (page 253 a page 285) qui nous ont paru importants pour confronter Marx et les mathématiques du calcul différentiel contemporain. Dans l'appareil critique russe figuraient également des «appendices» brossant un splendide panorama des pratiques mathématiques dans les sources utilisées par Marx. Nous les reproduisons (page 287 à page 335); s agissant d'auteurs de la fin XVIIIe-début XIXe, nous avons conservé le vocabulaire de l'époque en recherchant les textes originaux pour les auteurs écrivant en français et les traductions contemporaines pour les étrangers (originaux généralement en latin).

Ce travail nous aurait semblé incomplet sans - au moins - une description des textes *non* publiés intégralement dans l'édition russe et une évocation de la démarche de Marx à l'égard des mathématiques. C'est l'objet des premiers chapitres de notre introduction (page 19 à page 107). Enfin, en retraçant la démarche de Marx (à l'aide de sa correspondance dont nous publions certaines lettres médites en français) et en consultant ses sources, il nous est apparu que les éditions précédentes avaient sous-estimé l'importance de Hegel sur les recherches de Marx et nous avons estimé que ces textes étaient suffisamment déroutants pour justifier quelques commentaires sur Marx, Hegel et les mathématiques. C'est là-dessus que nous avons achevé notre introduction.

Ce travail nécessitait des compétences en mathématiques, en philosophie, en histoire des idées mais aussi en allemand, en anglais et en russe que nous étions loin de pouvoir rassembler de sorte que nous avons du faire appel à l'aide et aux conseils de différentes personnes que nous remercions vivement.

Alain Alcouffe
octobre 1984

Man weiß nicht, was man ist
Ich weiß nicht, was ich bin;
ich bin nicht, was ich weiß.
Ein Ding und nit ein Ding,
ein Stüpfchen und ein Kreis

On ne sait pas ce que l'on est
Je ne sais pas ce que je suis;
je ne suis pas ce que je sais
Une chose et pas une chose;
un minuscule point et un cercle.

Angelus Silesius; *Le pèlerin chérubinique*

Engels à Marx,

18 août 1881

Hier, j'ai enfin trouvé le courage de travailler tes manuscrits mathématiques, sans l'aide des manuels et j'ai eu le plaisir de constater qu'ils n'étaient pas indispensables. Je t'en félicite. La chose est claire comme de l'eau de roche, tellement que l'on ne peut assez se demander comment font si obstinément les mathématiciens pour la mystifier. Mais cela vient de la façon de penser aplatie de ces messieurs. Poser $\frac{dy}{dx}$ résolument et sans détour $= \frac{0}{0}$ ne traverse pas leur crâne. Et pourtant, il est clair que $\frac{dy}{dx}$ ne peut être la pure expression d'un procès achevé en *x* et *y* que si la dernière trace des quanta *x* et *y* a également disparue, qu'il ne reste que l'expression du procès de transformation qu'ils ont connu sans aucune quantité.

Tu n'as pas à craindre qu'un mathématicien t'ait devancé sur ce point. Cette façon de différencier est tellement plus simple que toutes les autres que je viens de m'en servir moi-même pour dériver une formule que j'avais à l'instant égarée, et que j'ai vérifiée après coup de la façon habituelle. Cette procédure devrait faire la plus grande sensation, en particulier parce qu'il est clairement démontré que la méthode habituelle, négligeant *dx dy* est positivement fausse. Et la beauté tout a fait particulière quelle contient: ce n'est que si $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ que l'opération est mathématiquement correcte.

Ainsi le vieil Hegel avait vu juste, quand il disait que la condition fondamentale de la différenciation était que les deux variables devaient être à des puissances différentes et que l'une au moins devait être à la puissance deux ou ½ . Nous savons maintenant pourquoi.

Quand nous disons que, dans $y = f(x)$ *x* et *y* sont des variables, il s'agit là d'une affirmation qui n'a pas de conséquence tant que nous en restons là et *x* et y sont toujours, *pro tempore,* en fait, des constantes. Ce n'est que quand elles varient réellement, c.à.d. à l'intérieur de la fonction, qu'elles deviennent en fait des variables et ce n'est qu'alors que des rapports, non pas des deux variables en tant que telles, mais de leurs variations, rapports encore dissimulés dans l'équation originelle, font leur apparition. La première dérivée $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ exhibe ce rapport, tel qu'il survient au cours de la variation effective, c.a.d. dans toute variation donnée, la dérivée finale le montre dans sa généralité pure et de là, nous pouvons passer de $\frac{dy}{dx}$ *à* n'importe quel $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tandis que cette dernière ne concerne que des cas particuliers. Mais pour passer du cas particulier au rapport général il faut que le cas particulier soit supprimé/conservé en tant que tel. Ainsi une fois que la fonction a accompli le procès de x à x' avec toutes ses conséquences, on peut faire tranquillement revenir x' à x; il ne s'agit mis à part le nom de l'ancienne variable x, elle a accompli une transformation effective et le résultat de la transformation demeure, même si nous le supprimons/conservons[1] à nouveau.

Ici, ce que beaucoup de mathématiciens affirmaient depuis longtemps sans parvenir à en fournir des preuves rationnelles devient enfin clair: le quotient différentiel est l'origine, les différentielles *dx* et dy en sont dérivées. La dérivation de la formule elle-même exige que les deux facteurs appelés irrationnels forment à l'origine l'un des côtés de l'équation et ce n'est que quand l'équation est remise dans sa première formulation $\frac{dy}{dx} = f'(x)\,dy$ que l'on peut en faire quelque chose, que l'on est libéré des irrationnelles et que l'on a, à la place, leur expression rationnelle.

La chose m'a tellement saisi qu'elle m'a non seulement couru dans la tête toute la journée, mais encore la semaine dernière j'ai, dans un rêve, donné mes boutons de chemises à différencier à un bonhomme qui a décampé avec.

Ton F.E.

[1] Pour le sens de conserver/supprimer (Aufheben) voir page 80-3 Note de l'éditeur:

Engels à Marx

21 novembre 1882

Ci-joint un essai mathématique de Moore. La conclusion selon laquelle «la méthode algébrique n'est qu'un déguisement de la méthode différentielle»[1] se rapporte naturellement seulement *à* sa méthode personnelle de construction géométrique et elle est effectivement assez correcte dans ce cas. Je lui ai écrit que tu n'attachais aucune importance *à* la façon selon laquelle on se représente la chose dans la construction géométrique l'application aux équations des courbes suffit bien. En outre, la différence fondamentale entre la méthode et l'ancienne est que tu fais passer x en x', le faisant effectivement varier tandis que les autres partent de $x + h$, ce qui représente toujours une somme de deux grandeurs, mais jamais la variation d'une grandeur. C'est pourquoi ton *x,* même s'il passe par *x'* et revient au premier x, est néanmoins autre que ce qu'il était initialement; tandis que, si on ajoute d'abord *h à x* et qu'on l'enlève ensuite. x reste tout le temps constant[-2]. Cependant toute représentation graphique est nécessairement la représentation du procès achevé, du résultat, c.à.d. d'une grandeur devenue constante, la droite x; soit accroissement apparaît comme x + *h*, deux morceaux d'une ligne. D'où il découle qu'une représentation graphique de ceci, comme x devenant x' et redevenant x, est impossible.

---

[1] En anglais.

[2] On retrouve cette idée d'une réversibilité limitée de la relation fonctionnelle chez l'économiste Alfred Marshall. Joan Robinson a montré que Marshall. dans la fonction de coût moyen, C = f(q), où le coût moyen dépend du niveau de la production q, introduisait une troisième «dimension», le temps: ainsi si la production s'accroit de *q* a *q'*, on passe aussi de la date t à la date t'; si le cout moyen pour q' est plus faible que pour q en raison d'une amélioration du savoir-faire, alors même si en t'', la production redescend en u l'acquis dû au savoir-faire demeurera, même si la «technique» reste inchangée.

Notes de l'éditeur

Marx à Engels

22 novembre 1882

Sam, comme tu l'as vu immédiatement, critique la méthode analytique que j'ai appliquée, en la poussant tranquillement de côté et en s'occupant, à la place, de l'application géométrique, dont je n'ai pourtant pas dit un seul mot. De cette façon, je pourrais balancer la fin de l'analyse du développement de ce que l'on appelle précisément la méthode différentielle - qui commence avec la méthode mystique de Newton et Leibniz, se poursuit avec la méthode rationaliste de D'Alembert et d'Euler, s'achève avec la méthode strictement algébrique de Lagrange (qui part toujours cependant du même point de vue fondamental et originel que Newton et Leibniz - je pourrais balancer la fin de l'analyse de tout ce développement historique, en disant que rien n'a, en essence. *pratiquement* changé en ce qui concerne l'application géométrique du calcul différentiel c.à.d. de le rendre sensible géométriquement.

Comme le soleil se montre justement, c'est le moment d'aller faire une promenade, aussi je.ne poursuis pas *nunc*[1], sur les mathématiques, mais je reviendrais â l'occasion, en détail, plus tard, sur les différentes méthodes[2].

---

[1] Pour l'instant.

[2] Dans l'édition DIETZ, cette lettre est une des dernières de Marx à Engels et nous ignorons si Marx a effectivement fait part de remarques supplémentaires a Engels.

Note de l'éditeur:

DES MATHÉMATIQUES
ET DES ÉCONOMISTES

Publier en 1984 une traduction française des *Manuscrits Mathématiques* de Marx *(MMM)* et un appareil critique permettant de les situer exige quelque justification. En effet, on peut se demander qui cela peut intéresser et si la situation que déplorait G. Frege en 1884 a beaucoup changé un siècle plus tard:

> «Il est certain que tes perspectives de mon livre sont restreintes. En tous cas, il faut renoncer à tous les mathématiciens qui pensent lorsqu'ils rencontrent des expressions logiques comme «concept», «relation». «jugement»- *metaphysica sunt, non leguntur!* et également aux philosophes qui s'écrient lorsqu'ils aperçoivent une formule : *mathematica sunt, non legimtur!* et il y a très peu de gens qui n'appartiennent pas à ces catégories»[1].

Certes, dans son *Introduction à la Philosophie Mathématique, B.*Russel pouvait estimer que les logiciens incapables de suivre un raisonnement symbolique et les mathématiciens ayant appris leur technique sans chercher à en comprendre le sens ou le fondement devenaient de plus en plus rares[2]. Cet optimisme est démenti par le jugement tranchant de Jean Dieudonné: «95% des mathématiciens se moquent éperdument de ce que peuvent faire tous les logiciens et tous les philosophes» C'est que, pour J. Dieudonné, il faut parler au passé de «la fameuse crise de fondements qui commence aux environs de 1895 et qui continue jusque vers 1930»[3].

Peut-être même le fossé s'est-il encore élargi quand J.T. Desanti admet qu'un lien qui s'était constitué entre les sciences et la philosophie est

---

[1] Gottlob Frege, Préface au premier tome des Lois fondamentales de l'arithmétique. pp. X à XIII, 1884, cité d'après les textes publiés par G. Patzig en 1962. cf. Frege, 1969.

[2] Bertrand Russel, 1961, p. 231.

[3] Jean Dieudonne, dans l'Introduction au «Panorama des Mathématiques Pures»s repris dans sa conférence au Séminaire de Philosophie et Mathématique de l'ENS, cf. Dieudonné, 1982,.p 17.

aujourd'hui brisé: «le philosophe n'énoncera plus le savoir»[4]. Bien pire, les mathématiciens, à la suite justement de cette crise des fondements, ont opéré un retour sur l'origine de leur discipline qui conduit «un grand nombre d'entre eux sur des positions `platoniciennes' reconnues ou non, proclamées ou non» [5]. Cette intrusion massive des mathématiciens dans le domaine philosophique, le philosophe J.T. Desanti dont les travaux portent précisément sur la mathématique, ne sait trop comment l'analyser et le choix du vocable «platonicien» lui paraît «bizarre » [66].

Pourtant, le «développement impétueux des mathématiques» et leur diffusion croissante dans tous les domaines du savoir et de l'activité humaine appelle une réflexion sur les mathématiques et leur place dans notre culture. Il nous semble que l'intérêt croissant qui s'exprime en France pour la philosophie des sciences, en général, pour les rapports philosophie-mathématique, en particulier, témoigne de la nécessité et de l'intérêt de cette confrontation. Ce seul point justifierait la publication des *MMM.* Qu'on nous entende bien Nous doutons qu'ils puissent, tels quels, être partie prenante dans les débats actuels. Nous sommes, au contraire, persuadés que ces fragments, pour être interprétés, demandent un éclairage marxiste, philosophique, mathématique, aussi nous n entendons pas en tirer des «révélations», simplement, nous pensons que l'on peut, au moins, paraphraser Bourbaki jugeant la tentative de Lagrange de renouveler les fondements du calcul infinitésimal, Bourbaki écrit: «bien entendu, un mathématicien de la valeur de Lagrange ne pouvait manquer d'obtenir à Cette occasion des résultats importants et utiles»[77]. il n'est pas sans intérêt pour la philosophie, les mathématiques, le matérialisme dialectique d'examiner les conclusions auxquelles Marx était parvenu au cours d'une étude qu'il a poursuivie pendant près de 20 ans.

Pourtant, nous ne nous situons, pour notre part, dans aucune de ces trois catégories et notre attention pour les *MMM* a été attirée du point de

---

[4] J.T. Desanti, 1975, pp. 7,8.

[5] C'est à dire selon eux, «les vérités mathématiques «existeraient» indépendamment de toute pensée dans l'esprit des mathématiciens» Cf. Working with numbers, la revue par R. Penrose du livre de P.J. Davis et R. Hersh, 1982, dans le Times Litterary Supplément, 14 mai 1982. R. Penrose se définit lui-mente comme un «Platonicien sans complexe et sans repentir» il soutient qu'une «grande proportion des mathématiciens en exercice sont platoniciens par inclination quoique beaucoup prennent une position formaliste quand ils sont forces de faire un choix définitif». Dans le discours des «Platoniciens» perce un sentiment de confirmation de leur position, d'adhésion croissante des mathématiciens. Cf. la position de René Thom. 1974 qui définit ainsi «la conception réaliste ou platonicienne» : «Les êtres mathématiques existent indépendamment de notre pensée en tant qu'Idées Platoniciennes», pp. 63, 64.

[6] J.T. Desanti, ibidem, p. 142.

[7] N. Bourbaki, p. 247.

vue de l'économie politique, à la fois en tant qu'enseignant et en tant qu'historien de la pensée. Certes, la transformation de l'enseignement secondaire et le rôle dissuasif des mathématiques dans la filière académique à dominante économique sont en passe de faire disparaître de celle-ci «ces étudiants qui blêmissent à la vue d'une formule algébrique» mais d'une part, nous doutons qu'il s`agisse là d'une amélioration véritable du recrutement, d'autre part il n'en demeure pas moins que les étudiants dont parle Baumol restent probablement majoritaires parmi ceux qui abordent l'économie dans des filières moins spécialisées (droit, gestion, sociologie, etc.) et finalement, il y a bien peu de «maîtres économistes qui comprennent les symboles et puissent parler en mot».[8] Parmi ceux qui ne peuvent revendiquer ce titre, nous nous sommes intéressé au sous-ensemble de ceux qui rejettent la formalisation sur des critères idéologiques: la formalisation serait-elle un instrument de domination au service des classes au pouvoir?

La question ne relève pas de l'acné juvénile de l'apprentissage de l'économie et l'historien de la pensée ne peut manquer de retrouver lors d'une confrontation avec l'économie de Marx la question de la formalisation. Ce débat est sans doute aussi ancien que le marxisme. Bien que nous ne connaissions les réflexions de C. Schmitt que par les paternelles remarques que lui adresse F. Engels, il ne fait guère de doute que cet auteur - social démocrate, donc favorable à la perspective générale tracée par Marx - s'inquiétait, dès 1889, de la cohérence de son analyse économique et des rôles respectifs valeurs/ prix et taux de plus-value/taux de profit[9]. On sait qu'avec Bortkiewicz, ces questions allaient donner naissance à une nouvelle «variété de littérature» , le problème de la transformation[10]. Mais l'analyse de Marx ne peut être réduite à l'explication des prix, aussi, que l'on réussisse à trouver une cohérence dans la transformation selon Marx ou que l'on constate un manque de cohérence - plus ou moins important- on n aura pas pour autant justifié dans un cas, «réfuté dans l'autre», Marx. C'est pourquoi il convient d'aller au-delà de cette discussion de portée, somme toute, limitée et l'apparition

---

[8] W. Baumol et A. Binder, p. 166

[9] Engels, pp. 15 et 16, préface du Livre III du Capital et la lettre du 12 mars 1895 d'Engels a Schmidt.

[10] En 1971, le Journal of Economic Litterature publiait un article de Paul Samuelson sur le problème de la transformation qui devait provoquer une controverse «comme ce fut rarement le cas dans l'histoire du JEL».. Le journal fut amené a consacrer deux revues spéciales a ce problème en mars 73 et mars 74 sans parvenir a un terme. La position de Samuelson qui avait publié en 1957 un article avec le sous-titre Une discussion moderne des modèles économiques marxistes est révélatrice d'une évolution, dans la réception de Marx par les économistes mathématiciens non-marxistes, qui se traduit par une meilleure compréhension.

avec Sraffa d'un rival sérieux des modèles (en schématisant) Walras/Hicks ne pouvait manquer de transformer l'approche de l'économie de Marx. On peut maintenant distinguer une grande variété d'attitudes. Sans prétendre refléter toutes les nuances de façon exhaustive, nous relèverons une première opposition entre ceux qui acceptent l'idée d'une confrontation entre l'économie mathématique (comme méthode) et la théorie économique marxienne et ceux qui la rejettent résolument.

Pour les premiers, selon les termes de G. Maarek, il apparaît «clairement (...) que la pensée économique marxienne se laisse réd*uire* par les instruments d'analyse de l'économie politique moderne, enseignée aujourd'hui dans le monde occidental et pouvait même être assez fidèlement restituée dans son langage»[11]. Ce travail conduit alors à la conclusion selon laquelle en généralisant une remarque de Morishima: la théorie de Marx est le prototype de la théorie économique moderne[12] (Marx *a anticipé* l'équilibre général, l'analyse input/output, la théorie de la croissance, etc.). Mais cette application peut être conduite dans une pure perspective d'évaluation ou bien dans une perspective de développement. Dans le premier cas, elle conduit généralement à un rejet après inventaire: une présentation des thèses de Marx recourant à une formalisation plus ou moins élaborée est tentée; elle conduit à une critique plus ou moins radicale du raisonnement en terme de valeur (rejet total en raison d'une antinomie avec le raisonnement en prix (Samuelson) ou bien, détour plus ou moins inutile (Steedman, Pasinetti, Abraham-Frois)).

Dans le second cas, il s agit de «construire un modèle permettant d'analyser les positions et les raisonnements de Marx en économie». A cette fin, «la formulation en termes d'équations simultanées des principaux éléments de la théorie de Marx» conduisant aux conclusions précédentes, «une approche en termes d'inégalités sera adoptée», pour «sauver Marx» Telle est, en schématisant, la position de Morishima-Catephores[13].

---

[11] G. Maarek. p. 16.

[12] Cette conclusion de Morishima (1, pp. 8 et 9) n’est d'ailleurs pas nouvelle et si l'on en croit Jean Robinson. Piero Sraffa se moqua d'elle quand elle commença à lire *Le Capital* et a écrire son *Économie de Marx* disant quelle en faisait «un précurseur méconnu de Kalecki» (Robinson 1, VIII). Pour fournir un repère supplémentaire nous pouvons indiquer que nous nous situons dans cette tradition qu'Anwar Shaik a appelé Ricardo-Marx-Keynes-Sraffa-Kalecki. Mais cette conclusion n’est pas non plus propre à un courant particulier et tant Schumpeter que Blaug (càd, les deux «autorités» en matière d'histoire de la pensée économique) ont reconnu les innovations de l'analyse marxiste. Nous nous interrogeons simplement sur la dépendance entre la lecture-mathématique-de Marx et les conclusions auxquelles on parvient ; que doit Marx's Economics de Morishima à Mars, à Morishima et à l'algèbre linéaire'?

[13] Morishima- Catephores pp. 51 et 90.

Mais ces bonnes dispositions à l'égard des mathématiques ne font pas l'unanimité parmi ceux qui s'intéressent à Marx et il ne manque pas d'auteurs qui s'élèvent avec plus ou moins de vigueur contre la possibilité de formaliser l'économie de Marx. Les arguments sont à la fois des arguments de méthodologie générale et des arguments sur les mathématiques. Méthodologie générale, tout d'abord, la pensée de Marx peut, s'il en est, être qualifiée d'holiste. On peut discuter très longuement sur l'autonomie qu'il reconnaissait aux différents moments infrastructure/superstructure, économie/politique/idéologie.

On ne peut sous-estimer l'importance qu'il accordait à leurs articulations. Ce sont tous les aspects de la vie sociale qui étaient visés par la critique de Marx, or s'il est déjà difficile aux économistes de garder tout le long d'une démonstration utilisant des modèles mathématiques - et encore plus lors de l'exploitation des résultats - les restrictions ou les limitations que représentent des hypothèses pourtant confinées au domaine économique, comment dès lors réussir a formaliser une pensée qui prétend découvrir les articulations de l'ensemble du champ social? Certains auteurs, rappelant le sous-titre du *Capital,* vont jusqu'à nier que Marx ait produit «une» théorie économique, exploitant cette immersion de l'économique dans une théorie sociale plus complète. Voici quelques illustrations parmi bien d'autres:

«Marx n'était pas un économiste au sens étroit du terme. La théorie économique constitue une part organique de son immense système sociologique qui incluait aussi la philosophie et la théorie de la lutte des classes», ainsi commence la contribution de A. Milejkouskij (p. 352), «Économiste pur», auteur d'une nouvelle théorie à l'usage des spécialistes? Marx ne le fut pas et ne voulait pas l'être». Ainsi nous «avertit» M. Rubel au début des *Oeuvres Économiques* de Marx dans la Pléiade (p. XIV). On pourrait multiplier les citations dans ce sens qui constituent la réponse habituelle des marxistes quand l'attitude à l'égard de Marx passe de «la négation totale à l'analyse partielle» (C. Murgescu) (p. 429).

Il est frappant de constater que ce type d'arguments débouche sur une mathématicophobie qu'illustre le titre de l'article Anwar Shaikh *Misère de l'Algèbre* construit sur le modèle de l'Anti-Proudhon de Marx *Misère de la Philosophie.* Anwar Shaikh s'en prend à la «formalisation de Marx» par les néo-Ricardiens. Dans un article purement littéraire, Shaikh soutient la supériorité de l'analyse de Marx sur celle des néo-Ricardiens affirme que c'est «leur algèbre sur laquelle ils fondent leur prétention à la rigueur qui constitue en tan leur plus grande faiblesse». Quoiqu'il concède une possible neutralité de l'algèbre, il conclut son attaque sur le néo-Ricardisme qu'il juge «trop respectable » en disant: «Ses racines dans le keynésianisme de gauche sont faciles à établir et son refuge dans l'économie mathématique tout à fait révélateur»[14]. Pour nous, cette dernière remarque est surtout révélatrice d'un *a priori* idéologique sur les problèmes méthodologiques, *a priori* sectaire d'ailleurs, puisque, ruse de la théorie économique, Keynes, lui-même, pourtant éminent mathématicien, par ailleurs, n est pas loin de partager cette prévention. Il écrit, en effet, dans la «Théorie Générale»:

«Les méthodes pseudo-mathématiques, comme celle que nous décrirons dans la section VI - qui donnent une figuration symbolique d'un système d'analyse économique - ont le grave défaut de supposer expressément l'indépendance rigoureuse des facteurs qu'elles utilisent et de perdre leur force et leur autorité lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée. Dans le raisonnement ordinaire, où nous n'avançons pas les yeux fermés mais où, au contraire, nous savons à tout moment ce que nous faisons et ce que les mots signifient, nous pouvons garder «derrière la tête» les réserves nécessaires ainsi que les atténuations et les adaptations que nous aurons a faire par la suite, alors qu'il n'est pas possible de transporter de la même manière des différentielles partielles complexes «en marge» de plusieurs pages d'algèbre où on les suppose toutes nulles. Trop de récentes «économies mathématiques» ne sont que pures spéculations; aussi imprécises que leurs hypothèses initiales, elles permettent aux auteurs d'oublier dans la dédale des symboles vains et prétentieux les complexités et les interdépendances du monde réel»[15].

On sait que cette discussion sur l'économie et la formalisation n'a pas été cantonnée aux discussions académiques et de ce point de vue les théories économiques de, Marx et de Keynes ont connu des sorts très différents. Ces dernières ont donné un grand élan à la construction de modèles économiques applicables et vérifiables, et comme l'écrit Mark Blaug, «l'économétrie resta une branche ésotérique de l'économie jusqu'à ce que Keynes se soit taillé sa place» [16].

Au contraire, en Union Soviétique, de 1930 ä la fin des années 1950, l'utilisation de méthodes mathématiques non élémentaires fut considérée

---

[14] Anwar Shaik in Steedman/Sweezy, p. 268. Face a cette attitude, rappelons la présentation du holisme donnée par Bertrand Russel: «Selon Hegel ci de nombreux autres philosophes, le caractère de chaque partie de l'univers est si profondément affecte par ses relations avec les autres parues et avec l'ensemble qu'aucune proposition vraie ne peut cire faite sur une des parues exceptée celle qui consiste à marquer sa place dans l'ensemble. Comme sa place dans l'ensemble dépend de toutes les autres parties, une proposition vraie relative a cette place dans l'ensemble assignera en meure temps la place de toutes les autres parties dans l'ensemble. Ainsi, il ne peut y avoir au une seule proposition vraie; il n y a pas de vérité en dehors de toute la vérité. (...)»; B. Russel (1945), p. 712 (voir aussi p. 175, la critique du holisme présentée comme une faute logique).

[15] J.M. Keynes, chapitre 21, p. 313.

[16] M. Blaug, p. 773.

comme anti-marxiste et rejetée. Il est piquant de relever que ce fut le même auteur qui décréta en 1930 que l'économie mathématique était la branche la plus réactionnaire de l'économie bourgeoise» en 1930 et qui en 1932 représentait la délégation soviétique à la section «Philosophie et Histoire» d'un congrès international de mathématiciens et y exposait la «nouvelle fondation du calcul différentiel par Karl Marx»[17]. C'est que l'école d'économistes mathématiciens russe, qui à la veille de la Révolution de 1917 avait déjà connu un développement certain vécut un véritable «âge d'or» durant les années 20, mais dans l'ensemble ces auteurs mirent en garde contre les conséquences économiques des mesures d'industrialisation forcée staliniennes. Cela suffit, d'abord, pour les écarter au moment où toute forme d'opposition était éliminée et, ensuite, à créer la légende selon laquelle l'utilisation des mathématiques en économie est idéologiquement suspecte.

Dans ce contexte, il est tentant de rapprocher ce comportement politique vis-à-vis des rapports mathématiques/économie de la «thèse de l'ignorance» marxienne en la matière. Cette thèse de l'ignorance a régulièrement été avancée depuis que Bortkiewicz a formulé un jugement sévère sur la cohérence du procédé de transformation des valeurs en prix de production par Marx dans le *Livre III.* Rappelons à cet égard l'ironie avec laquelle Pareto traitait des allégations de Engels concernant les compétences mathématiques de Marx. En effet, étudiant la rotation du capital et l'importance accordée par Marx à la «libération» ou «dégagement du capital», c'est-à-dire la liquidité de l'économie, Pareto parle de «calculs fort peu compréhensibles» et il cite Engels qui concède qu'il s'agit bien de «calculs pénibles» mais ajoute «Marx qui connaissait à fond l'algèbre, n'avait pas l'habitude du calcul numérique, surtout du calcul commercial»; le commentaire de Pareto, en note, est tranchant: «sur ce point, Engels doit être cru sur parole: les preuves manquent». C'est naturellement la compétence de Marx en algèbre que vise ironiquement Pareto. Même si la publication des *Manuscrits Mathématiques* est une

[17] Cf. Smolinski pour la condamnation par E. Kolman de l'économie mathématique et l'édition anglaise des Manuscrits Mathématiques de Marc pour deux articles de ce même Kolman sur Marx, Hegel, et les mathématiques. L'emphase de Kolman prêterait aujourd'hui à sourire: «La science en Union Soviétique, et Y compris les mathématiques, est forte parce quelle possède la dialectique de Hegel, dépassée d'un point de vue matérialiste ci dégagée de ses distorsions idéalistes, et les principes de la planification socialiste (...)». Mais il ne faut pas oublier que «l'accomplissement du plan quinquennal, l'électrification de l'Union Soviétique (...)» loin d'avoir «d'effet favorable sur le développement de la théorie mathématique», mut été précédés et accompagnes de la liquidation physique des économistes mathématiciens (Groman, Kondratief) ou de leur emprisonnement prolonge (Feldman, Vainshtein) quand ils n'avaient pas été conduits à abandonner les recherches économiques (E. Slutsky).

réponse – tardive - à cette mise en demeure, il faut bien admettre que les avatars des manuscrits mathématico-économiques de Marx justifient - au moins - les soupçons à l'égard de sa capacité à utiliser les mathématiques[18].

Il faut ajouter que le rapprochement des jugements osés de Engels sur les mathématiques avec sa haute opinion des capacités mathématiques de Marx n'a pu que renforcer, en définitive, la thèse de l'ignorance, selon la maxime «à trop vouloir prouver». Engels, en effet, dans son discours lors de l'enterrement de Marx, disait: «Mais dans tous les domaines que Marx a étudiés - et il a étudié de très nombreux domaines et jamais superficiellement - dans tous les domaines, même dans celui des mathématiques, il a fait des découvertes indépendantes» tandis que dans *l'Anti-Dühring,* il consacre quelques brefs développements aux mathématiques pour exposer la négation de la négation qu'il retrouve dans $-a*a = a^2$ et dans le calcul différentiel. Ces quelques lignes ont, peut-être, servi dans la polémique contre Dühring, elles n'ont sûrement pas fait avancer l'estime des mathématiciens et des philosophes pour la dialectique[19.]

Il apparaît ainsi une convergence superficielle d'arguments hétéroclites pour élever une barrière entre l'économie marxienne et les mathématiques inapplicabilité des mathématiques en économie, ignorance de Marx, déviations idéologiques de «l'économie mathématique». Dans cette situation, il convient d'avoir recours à un examen scrupuleux des sources.

Dans cette tâche, nous sommes pleinement conscients de l'ampleur des changements qu'ont connus les mathématiques depuis un siècle. Elle

---

[18] V. Pareto, 1903, p. 338. Nous verrons plus loin les avatars du Livre III du Capital ou tout au moins de ses parties mathématiques: Pareto s'attaque ici au chapitre XV-de l'édition d'Engels du Livre II Engels, (p. 263, t. IV, Éditions Sociales) v annonce clairement qu'il a «conserve que ce qu'il y a de plus simple et d'arithmétiquement exact» Kautsky a. d'après certains, corrigé à tort certains tableaux. M. Rubel est allé encore plus loin dans l'édition de la Pléiade puisqu'il s'est contenté de publier des «matériaux»t abandonnant notamment toute cette partie de la 2e Section du Livre II.

[19] E. Kolman rapporte, avec approbation, le jugement de Engels de 1883 en conclusion de son article de 1968 sur les Manuscrits Mathématiques de Marx, (p. 234). On trouvera les développements de Engels dans l'Anti-Dühring, pp. 167-8. II est stupéfiant de lire le commentaire de l'éditeur français sur ce passage: l'Anti-Dühring est de 1877 et en 1963, 'éditeur français commente: «C'est la notion de passage a la limite qu'Engels analyse. Alors récemment découverte (Cauchy) elle reste a la base du calcul des dérives, des intégrales ci des sertes» [C'est nous qui soulignons récemment. il faut, quand meure, ne pas oublier que: a) le texte de Engels qui parle de problèmes mathématiques vieux de 200 ans concerne manifestement les procédés de Newton et Leibniz et ignore surement la «solution» de Cauchy-comme Marx d'ailleurs cf. mira p. 49 et, b) en 1877. Le passage à la limite était récent … depuis 56 ans!

frappe d'étonnement les mathématiciens contemporains. Citons quelques témoignages: «Il s¯est produit plus de mathématiques fondamentales depuis 1940 qu'il n'y en a eu entre Thalès et 1940» J. Dieudonné, ou bien «Ce que sait l'enfant aujourd'hui, les Grecs ont mis deux siècles à l'établir» Paul Dubreil, ou encore «A mon sens, un élève sortant de l'enseignement secondaire (16-17 ans) et se destinant à une carrière scientifique, devrait se trouver à peu près au meure niveau scientifique qu'un Leibniz, avec en plus quelques notions d'algèbre linéaire plus moderne» René Thom - l'histoire ou la réflexion sur les mathématiques abondent de ce type de remarques. Elles ne peuvent, à notre avis, avoir de sens que dans une conception étroitement platonicienne des mathématiques pour laquelle les mathématiques constituent un ensemble de vérités éternelles, chaque génération faisant croître le stock des vérités connues. Nous trouvons dans l'histoire des mathématiques suffisamment d'exemples de percées qui s'avèrent finalement des impasses, de «filons» abandonnés puis remis en chantier pour douter de la pertinence de ces comparaisons entre les siècles et même les millénaires. A cet égard A. Lichnerowicz a une position très ambigüe se contredisant d'une phrase à l'autre: «On peut dire que le développement des mathématiques pendant la brève période que nous venons de vivre a été beaucoup plus *grand* que pendant toute leur histoire antérieure. Cette phrase n'a évidemment pas un sens mathématique. Mais quelle que soit la manière dont on essaie de la prouver, cette proposition se trouve, croyons-nous, vérifiée». La conclusion de Lichnerowicz traduit bien les difficultés pour évaluer ce changement quantitativement évident mais moins assuré qualitativement. C'est pourquoi nous pensons malgré tout que les mathématiques ont conservé une identité suffisante pour permettre - avec prudence - des comparaisons valables[20.]

Ainsi les *Manuscrits Mathématiques* de Marx sont un matériau important pour l'économiste mais aussi pour le mathématicien et le philosophe, qu'ils se réclament ou non de Marx. Nous «entendons pas ici procéder à l'examen des «qualités» mathématiques de ces textes distribuant prétentieusement bon points et/ou critiques, mats simplement fournir des points de repère pour faciliter la lecture des travaux de Marx, si ce n'est les «preuves» que réclamait Pareto, tout au moins des éléments d'appréciation.

[20] J. Dieudonné, p. 16, Paul Dubreil in F. Le Lionnais, p. 100, R. Thom 74, pp. 54-55. A. Lichnerowicz dans Piaget p. 475.

CHAPITRE I

LES MATHÉMATIQUES ET LES TRAVAUX DE RECHERCHE DE MARX

Les travaux mathématiques de Marx soulèvent des interrogations sur le développement de la pensée de Marx, sur tes rapports entre sa théorie économique et la formalisation, sur la conception marxienne des mathématiques. A notre connaissance, il n'existe pas d'étude synthétique portant sur cet ensemble de questions, c'est pourquoi nous pensons utile de présenter, ici, une chronologie des travaux considérés de Marx, de leurs publications et des commentaires dont ils ont fait l'objet.

Le meilleur repère chronologique concernant Marx est fourni par sa (volumineuse) correspondance. C'est d'ailleurs elle qui fournit la source la plus importante pour ses biographes et commentateurs. Nous avons utilisé diverses éditions de cette correspondance, nos références au texte allemand étant généralement faites d'après l'édition de A. Bebet et E. Bernstein de 1913, les autres éditions ayant été consultées pour des lettres à des tiers et pour leur appareil critique. Notons au passage que le recensement des « travaux mathématiques » pose des questions sur la définition même des mathématiques. Nous adoptons ici une acception volontairement englobante : est mathématique ce qui est référé comme tel dans les index thématiques consultés, ce que nous avons recensé nous–mêmes ayant trait aux mathématiques et/ou à l'usage des mathématiques (c'est–à–dire une utilisation, effective ou symbolique, possible des nombres à d'autres fins que statistiques). Par contre, nous n'avons pas procédé à un examen systématique des textes canoniques de Marx (essentiellement du *Capital)*, ces textes et les gloses qu'ils ont provoquées emplissant les bibliothèques[21].

Nous avons, enfin, sommairement, situé ces références mathématiques par rapport aux activités de Marx à l'aide de la chronologie établie par M. Rubel dans le tome I des *Œuvres* de Marx dans la Pléiade et de différentes biographies de Marx et d'Engels.

---

[21]A notre connaissance, le premier auteur a s'être intéressé, du point de vue logique, aux mathématiques de Marx dans le *Capital* est J. Zeleny en 1968 ; on trouve également quelques remarques dans François Rica, 1974 (Dans Godelier 1966, on trouve des analyses sur la méthode de Marx réinterprétée à partir de Lénine; elles ne nous ont pas paru éclairer le problème traité ici ; *cf.* aussi note n° 40).

A – Chronologie des travaux de Marx en mathématiques

Il est possible que l'intérêt de Marx pour les mathématiques se soit manifesté dès la fin des années 1840. On trouve en effet des notes et des exercices mathématiques sur des cahiers de manuscrits de cette période, mais, naturellement, Janovskaja n'exclut pas que ces cahiers aient pu être complétés à une date ultérieure. Finalement, la première mention explicite se trouve dans une lettre du 11 janvier 1858. Depuis mars–juillet 1857, Marx a repris ses lectures économiques et il travaille à ses *principes de L'économie* (chapitre sur le capital). Voici le passage caractéristique de cette lettre à Engels :

> « 11 janvier 1858 Dans mon travail pour élaborer les *principes* de l'économie [le manuscrit de 1857–58 connu sous le nom de *Grundrisse*] je suis si fichtrement arrêté par des erreurs de calcul que de désespoir, je me suis mis à retravailler rapidement l'algèbre. L'arithmétique m'est toujours restée étrangère. Mais en faisant le détour par l'algèbre, je corrige rapidement le tir ».

Il n'est pas sans intérêt de relever une « coïncidence » dans cette nouvelle ardeur pour l'algèbre ; trois jours plus tard dans une lettre à Engels toujours, Marx lui fait part de l'avancement de son travail et des ouvrages utilisés à cet effet. Il mentionne également qu'il vient de relire *La Logique* de Hegel – ouvrage dans lequel Hegel consacre de longs développements au calcul infinitésimal. S'il a effectivement parcouru cet ouvrage et quelle qu'ait été sa familiarité avec la pensée de Hegel, on admettra sans peine qu'il n'a pas dû réaliser cette opération en trois jours et que la lecture de Hegel a donc dû précéder ou être concomitante à son intérêt pour l'algèbre. Il faut noter" pour en terminer provisoirement avec ce rapport Hegel–Marx que c'est fortuitement que celui– ci avait « récupéré » un exemplaire de *La Logique*, précisément celui de Bakounine.

Dès lors les mentions de travaux mathématiques vont se succéder régulièrement :

> « 6 mai 1859 Pendant ce temps, je fais l'algèbre pour calmer mon impatience ».

Les travaux mathématiques coïncident, d'ailleurs avec les périodes de difficultés ou d'intenses activités intellectuelles. Ainsi, en novembre 1860, sa femme a la petite vérole, il craint la contagion pour ses enfants et Hélène Demuth – peut–être aussi pour lui? – et il profite des 10 £ que lui envoie Engels pour embaucher une garde–malade. Le 23 novembre, il écrit à Engels :

> « La seule activité, grâce à laquelle |e puisse conserver la tranquillité d'esprit indispensable, ce sont les mathématiques ».

En 1863, Marx travaille à ses schémas de reproduction et il présente dans ce contexte un résumé du *Tableau Économique* de Quesnay a Engels. Sa fille est malade mais Marx trouve un « loisir » dans le calcul différentiel. Il se sent maintenant en mesure de le présenter à Engels.

> « 6 juillet 1863 (Jenny malade). Pendant mes loisirs, je fais du calcul différentiel et intégral. A propos! J'ai un excédent d'ouvrages à ce sujet et je vais t'en donner un au cas où tu voudrais aborder cette étude. Je considère que c'est presque indispensable pour tes études militaires. C'est du reste une partie des mathématiques beaucoup plus facile (pour ce qui concerne l'aspect purement technique) que par exemple l'algèbre au niveau supérieur. Pas d'études préliminaires nécessaires sinon la connaissance des histoires habituelles d'algèbre et de trigonométrie, en dehors des notions générales sur les sections coniques ».

Engels, d'ailleurs, a manifestement quelque doute sur la compétence acquise par Marx et il lui adresse, quelques mois plus tard, une réponse qui vise d'ailleurs peut–être l'ensemble de la méthode de Marx, les remarques touchent apparemment le *livre I* du traité de L.B. Francœur qui est consacré à la seule arithmétique[22].

> « 30 mai 1864 Je me suis plongé dans l'arithmétique de ton Francœur. dont tu sembles être resté à une certaine distance, si j'en juge par les innombrables fautes d'impression dans les chiffres que tu n'as pas corrigées. On y trouve des choses très élégantes mais le côté pratique de l'arithmétique y est traité de façon scandaleusement superficielle et mauvaise; on trouverait mieux dans n'importe quelle école allemande. Je doute aussi qu'il soit pratique de traiter des choses telles que les racines, les puissances, les séries, les log., etc. même à un niveau élémentaire, uniquement avec des chiffres (sans le moindre recours à l'algèbre et, en fait, sans même présupposer des connaissances élémentaires en algèbre). Si bon que soit le recours à des exemples chiffrés pour donner une illustration de la théorie, il me semble dans le cas présent qu'en se limitant à des nombres on rende les choses moins visibles qu'avec une simple démarche algébrique par a + b, précisément parce que l'expression générale dans sa forme algébrique est plus simple et plus visible et, qu'ici non plus qu'ailleurs, on ne peut s'en sortir sans l'expression générale. il est vrai que c'est précisément la partie qui par excellence est à proprement parler au–dessus de la dignité des mathématiciens ».

Mais ces réserves de Engels étaient peut–être à usage purement interne ou il a finalement été convaincu par les compétences de Marx, toujours est–il qu'en 1865, s'adressant à F.A. Lange qui se proposait d'éditer

[22] L.B. Francœur (1773-1849). mathématicien français. Ses travaux sont mentionnés par Marx dans le chapitre sur la différentielle des *Manuscrits Mathématiques*. La dédicace du livre de Francœur au Tsar de Russie n'émit, sans doute, pas un élément susceptible de le faire apprécier d'Engels.

un journal ouvrier et envisageait de solliciter la collaboration de Marx, il vante les mérites de Marx[23]:

> 29 mars 1865, F. Engels à F.A. Lange : « Hegel avait de telles connaissances mathématiques qu'aucun de ses élèves n'a été capable d'éditer ses nombreux manuscrits mathématiques après sa mort. Le seul homme à ma connaissance qui sache assez de mathématiques et de philosophie pour faire cela est Marx ».

Il est vrai que l'enthousiasme de Marx pour les mathématiques n'était pas réserve au seul Engels et s'il lui envoyait des livres en 1863, ce sont de véritables exposés sur l'origine du calcul qu'il rédigeait pour son oncle. Lion Philips en 1864[24]. Suivant sa méthode, Marx avait préparé ce travail en consultant les auteurs importants – de première main. Ainsi il avait travaillé le De Arithmenca de Boece (ou Boetius, 480–524) pour se familiariser avec les méthodes de calcul des Romains, il en tirait une grande admiration pour les mathématiciens de l'Antiquité :

« 14 avril 1864 (…)A voir les prodiges d'ingéniosité auxquels l'extraordinaire mathématicien Archimède avait recours, on mesure les obstacles infranchissables que la vieille méthode faisait surgir dans les calculs importants ».

En 1865, Marx « travaille comme un cheval » (en particulier au *Livre III).* Mais quoiqu'il n'ait toujours pas achevé le *Livre1l* du *Capital* (qui ne sera publié qu'en 1867) et qu'il souffre de furonculose (ou peut–être à cause de ses ennuis, les mathématiques avaient pour Marx des vertus thérapeutiques) il travaille les mathématiques :

> « 20 mai 1865 Dans les intervalles puisqu'on ne peut écrire sans interruption je fais du calcul différentiel dx/dy. Je n'ai pas la patience, à part ça, de lire quoique ce soit ».

Cette étude avance apparemment de façon satisfaisante; en effet, toujours rattaché à la correspondance de Marx, il existe un exposé

---

[23] F.A. Lange (1828-1875), publiciste et philosophe allemand, auteur d'un livre sur *La Question Ouvrière* et d'une *Histoire du Matérialisme.* Cet ouvrage loua un grand rôle dans 1'évolution intellectuelle de Nietzsche d'après son biographe C.P. Janz. F. A Lange était apparemment, assez bien disposé a l'égard de Marx — qui le détestait (*cf.* lettre *à* Kugelman du 27 juin 1870). F.A. Lange était membre de la le internationale, séduit par les idées de Darwin – comme Marx – mais aussi par celles de Malthus et très critique vis-à-vis de Hegel – éclectisme impardonnable pour Marx.

[24] Lion Philips était l'oncle maternel de Marx et l'exécuteur testamentaire de sa mère. « On peut dire que la famille du banquier Lion Philips était riche et il s'agit des très rares parents que Marx an plus tard apprécie et chez lesquels il se soit senti très à l'aise *La multinationale, aujourd'hui encore florissante, est issue de cette famille* qui, par ailleurs se convertit également », R. Friedenthal. p. 29. (C'est nous qui soulignons le passage sur Philips pour la petite histoire).

probablement joint à une lettre Engels, destiné à lui « expliquer le calcul différentiel ». Marx avait séjourné à Manchester chez Engels en octobre–novembre 1865 et à son retour à Londres, il lui expose le calcul des tangentes et sous–tangentes. Sa méthode est très leibnizienne : il envisage sur une courbe un point m et un point n, ce dernier étant « le plus infiniment rapproché de m sur la courbe », Et en conclusion de l'exposé, il note, sans commentaire : « les grandeurs différentielles disparaissent dans l'opération ».

Durant les années suivantes, on ne trouve plus guère de mentions de travaux mathématiques, dans les lettres de Marx, qui portent beaucoup plus sur la diffusion du *Capital*. On sait par contre que les résumés critiques d'ouvrages mathématiques l'occupent beaucoup durant cette période. On note au passage une remarque sur Leibniz :

> « 10 mai 1870, Kugelmann m’a envoyé pour mon anniversaire deux morceaux de tapis provenant de la salle de travail de Leibniz ce qui ma beaucoup amusé. Plus précisément, la maison de Leibniz a été détruite l'hiver dernier et ces imbéciles d'Hanovriens – qui auraient pu faire un commerce avec ces reliques à Londres – ont tout jeté. (…) J'ai suspendu ces deux choses dans mon bureau de travail. Tu connais mon admiration pour Leibniz ».

Durant les années 1870, les notations sur les mathématiques se font rarissimes dans la correspondance de Marx. Par contre la lettre du 31 mai 1873 témoigne d'un souci d'application des mathématiques à l'analyse économique. Il est à noter qu'il s'agit moins de construire un modèle que d'une analyse de type économétrique de données statistiques. Nous reproduisons ici cette lettre.

> « … J'ai fait part à Moore, ici, d une histoire avec laquelle je me débats depuis longtemps *privatim* dans mon for intérieur !. Mais il croit que la chose est insoluble, tout au moins, quelle l’est *pro tempore* [pour le moment], à cause des nombreux facteurs qu'il faut d'abord, pour la plupart, commencer par découvrir et qui constituent les éléments du problème. Voici ce dont il s'agit: tu connais les tableaux où sont portés les prix, les discount–rate [taux d'escompte], etc., etc., avec les fluctuations qu'ils subissent au cours de l’année, représentées par des courbes en zigzag qui montent et descendent. J'ai tenté, à différentes reprises, de calculer – pour analyser les crises – ces ups and downs [hauts et bas| comme on analyse des courbes irrégulières, et j ai cru possible (et je crois encore que c'est possible, à l'aide d'une documentation choisie avec assez de soin) de déterminer mathématiquement, à partir de là, les lois essentielles des crises. Moore, comme je l'ai dit, pense que la chose est irréalisable pour

l'instant, et j ai décidé d'y renoncer for the time being [pour le moment] »[25].

E. Kolmann interprète ce passage comme la recherche de « périodicités latentes dans les processus oscillatoires complexes » et il semble regretter que Marx n'ait manifestement pas eu connaissance de l'analyse de Fourier, dont les bases sont contenues dans l'ouvrage de celui–ci de 1822, *Théorie analytique de la chaleur*[26]. Ce rapprochement, intéressant, nous parait assez peu convaincant et nous croyons que les intuitions dont fait part Marx ici doivent plutôt être rapprochées d'un passage du *Livre III* où il étudie la fluctuation des prix.

« Les prix de marché sont tantôt supérieurs tantôt inférieurs à ces prix régulateurs de production, mais ces fluctuations s'annulent réciproquement. Qu'on examine des barèmes de prix sur une période assez longue. En écartant les cas où la valeur réelle des marchandises a été altérée par un changement de la productivité du travail, ainsi que ceux où le procès de production a été perturbé par des accidents naturels ou sociaux, on sera étonné de voir combien l'amplitude des écarts est relativement restreinte, avec quelle régulante ceux–ci se compensent. On trouvera qu'ici aussi s'imposent les moyennes régulatrices semblables à celles que Quételet a trouvées et démontrées pour les phénomènes sociaux »[27].

La référence – positive – à Quételet semble beaucoup plus significative. En effet, Quételet est un savant belge (1796–1874) surtout connu pour ses travaux statistiques et leurs applications aux sociétés humaines, quoique ses propres préoccupations aient plutôt porté sur l'astronomie, voire la poésie. Le fait est qu'il fut introduit par F. Arago auprès des Poisson, Laplace, Fourier, mathématiciens avant tous travaillé dans le domaine de la statistique et des probabilités. Sous l'influence de ces derniers, Quételet se consacra à ces nouveaux domaines. Ses études sur les caractéristiques physiques des hommes le convainquirent de la possibilité d'une « physique sociale » et ayant démontré des régularités pour les crimes,

---

[25] S. Moore (1830-1912) était un avocat de Manchester, membre de la le internationale. Il entretenait des relations amicales avec F. Engels depuis 1857. C'est lui qui traduisit en anglais le livre I du *Capital* en 1887. Engels parlait de lui comme du « seul anglais capable d'expliquer correctement le contenu du Capital » (lettre de Engels à J.M. Knowies du 17 avril 1883). Marx et Engels lui soumettaient les difficultés mathématiques rencontrées dans leur recherche et s'en tenaient généralement à son avis. S. Moore jugeait apparemment négativement le travail de Marx sur le calcul différentiel ; des arguments, sur ce point, au moins, ne semblent pas avoir été retenu par Marx et Engels (*cf*. lettre de Engels à Marx du 21 novembre 1882). Dans cette lettre, Engels semble partagé entre son admiration de Marx et la compétence qu'il reconnaît à Moore.

[26] E. Kolman. édition anglaise des *MMM*, p. 220. S'il fallait faire référence ; un ouvrage de Fourier, il nous semble que le *Mémoire sur les résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations* aurait été plus approprié ici.

[27] *Le Capital*. ES. l. VIII, p. 236.

les suicides, la nuptialité, il fut persuadé de la possibilité de découvrir d'autres régularités permettant de caractériser l'« homme moyen ». La méthodologie de Quételet se caractérise par la place des observations (– «les causes sont proportionnelles aux effets qu'elles produisent» – donc on peut déduire les causes des effets observables). le recours nécessaire aux grands nombres pour la fiabilité des conclusions. « L'influence individuelle sera d'autant plus faible que le nombre des individus considérés sera plus grand; elle sera remplacée par les séries de faits généraux qui dépendent des causes générales suivant lesquelles la société existe et se maintient. Ce sont là les causes que nous cherchons à saisir et quand nous les connaîtrons, nous serons à même de constater leurs effets dans le domaine social, tout comme nous constatons les effets des causes dans les sciences physiques »[28].

Nous croyons utile d'insister sur Quételet car il partageait avec Marx le souci d'établir des méthodes pour étudier l'homme qui soient aussi « scientifiques » que celle des sciences physiques et Marx, selon Lafargue. reprendra presque littéralement au sujet des sciences et des mathématiques les jugements de Quételet selon lesquels : « plus les sciences se développent, plus elles ont tendance à entrer dans le domaine des mathématiques qui sont en quelque sorte le centre vers lequel elles convergent. Nous pouvons juger de la perfection d'une science selon la facilité plus ou moins grande avec laquelle elle peut être approchée par le calcul ». Enfin, ce rapprochement nous semble, ici. justifié chronologiquement puisque fin 1873 – début 1874, Marx « reprend ses lectures pour la rédaction du *Livre III du Capital* » (Engels).

La correspondance des années 70 ne fournit plus d'indication notable par leur contenu sur les mathématiques. Ce silence de la correspondance n'est pas surprenant : Engels était la seule personne avec laquelle Marx ait, semble–t–il eu des échanges épistolaires dans le domaine des mathématiques. (Peut–être même des échanges tout court, puisque Moore est la seule autre personne qui ait apparemment discuté des mathématiques avec Marx et il ne paraît pas avoir eu une grande opinion des intuitions et des travaux de Marx dans ce domaine – une double méprise, si l'on en croît Smolinski). Or, après avoir quitté les affaires (et Manchester) au début des années 1870, Engels s'était installé à Londres à proximité de Marx ce qui, en dehors de circonstances fortuites, leur permettait naturellement de collaborer sans échanges de correspondance.. On peut donc voir dans les deux lettres de la période qui contiennent des allusions aux mathématiques le signe d'une vive préoccupation et, en effet, à plusieurs occasions, Engels a indiqué que,

[28] C'est une position très voisine de celle de Kant (résumée par Zeleny. 1968. II) « selon laquelle dans chaque théorie sur la matière, il y a autant de science que cette théorie inclut elle-même de mathématiques » (Kant : *Metaphysische Anfangsgrunde der Naturwissenschaft.* Berlin, 1911. p. 470). La citation de Quételet est tirée des *Instructions populaires sur le calcul des Probabilités* (1828) – ouvrage traduit en anglais en 1849.

durant ces années, Marx avait intensément travaillé les mathématiques; mais il est difficile de savoir quelle est sa contribution précise à *L'Anti-Dühring* ou, plus exactement dans quelle mesure les jugements sur les mathématiques de cet ouvrage reflètent les positions de Marx.

Enfin, il ne fait pas de doute que le calcul différentiel intéressait vivement Marx durant ses dernières années, comme en témoignent ses travaux de cette période et aussi, à nouveau, sa correspondance. Il existe, en effet, trois lettres de 1881–1882 consacrées exclusivement au calcul différentiel. Mais comme elles relèvent plutôt des travaux mathématiques eux–mêmes et que nous n'en connaissions pas de traduction française, nous les avons jointes, aux *MMM* (*cf. supra* pp. 5 à 8). Dans cette présentation de ce que l'on pourrait appeler avec Popper le « contexte de la découverte », nous relèverons simplement la circonspection d'Engels : « J'ai enfin trouvé le courage d'étudier tes manuscrits mathématiques », écrit-il le 10 août 81 avant de les faire lire par S. Moore, même s'il penche, à la différence de ce dernier, pour, en définitive, admettre l'originalité des travaux de Marx : « la conclusion selon laquelle « la méthode algébrique n'est qu'un « travestissement de la méthode différentielle » ne fait évidemment que renvoyer à sa propre méthode de construction géométrique et là, elle est également assez correcte» (21/11/82). Chose plutôt rare, le calcul différentiel provoque l'humour de Engels : « la semaine dernière, j'ai rêvé que je donnais mes boutons de chemise à différencier à un copain et il s'est enfui avec eux » (10/08/81).

Cette prudence de Engels, jointe à la sévérité de son opinion sur les premiers travaux de Marx en mathématiques (lettre du 30 mai 1864) pourrait expliquer en dépit d'affirmations tranchées à usage externe en sens contraire l'absence de publications de ces *MMM*. Mais il convient, à présent, de décrire ces manuscrits et de retracer leurs avatars éditoriaux.

B – Description des Manuscrits Mathématiques de Marx

Les *MMM* jouent l'Artésienne dans la littérature marxiste depuis un siècle. Régulièrement invoqués, ils ne sont exhibés – partiellement *Les mathématiques et les travaux de recherche de Marx* exhibés – qu'avec prudence. Nous n'en connaissons, d'ailleurs, aucun inventaire systématique de sorte que nous voudrions suppléer à cet état par une présentation rapide, mettant à profit la publication russe de 1968 (commentaire en russe, extraits en allemand avec traduction russe en vis–à–vis), la publication allemande (textes choisis – à partir de l'édition russe reproduite en fac-similé – et commentaires en allemand), la publication anglaise (traduction de l'édition russe – incomplète – et matériaux supplémentaires). Il nous faut d'abord préciser que ces trois éditions ont résolument écarté les applications économiques des mathématiques et en particulier le chapitre inédit du *Capital (Livre III)* purement mathématique. Ce texte est assez bien connu par l'article de L. Smolinski. Tous ces textes existent sous formes d'originaux ou de photocopies à la fois à Amsterdam, à l'Institut d'Histoire Sociale, et à Moscou. Il ne nous a pas été possible de consulter directement ces documents – on sait, en outre, que l'écriture de Marx est extrêmement difficile à déchiffrer au point qu'Engels lui–même s'en plaignait et ne pouvait dicter ces textes que par intermittence pour ménager sa vue ; comme il l'a souligné dans les préfaces aux livres II et III du *Capital.* C'est pourquoi nous avons utilisé comme source de cette édition, l'édition russe de 1968. Celle–ci a une longue histoire, manifestement liée aux fluctuations du Marxisme soviétique. Quoiqu'elle s'étende sur 41 ans on peut la retracer assez facilement à partir de l'introduction de l'édition russe et des articles de Kolmann et Janovskaja reproduits dans l'édition anglaise : en effet, la publication intégrale des manuscrits mathématiques de Marx a été annoncée en 1927 par l'Institut Marx–Engels de Moscou. Ils devaient constituer le *volume 16* des *Œuvres* de Marx–Engels. Ils ne sont finalement apparus qu'en 1968 et il ne s'agit, en outre, que d'une publication partielle qui n'est pas intégrée dans les *œuvres complètes.* Entretemps, les textes les plus achevés et les plus originaux étaient parus en 1933 – en russe – (11 pages environ sur un millier de pages)[29] Outre un imposant appareil critique, l'édition de 1968 comprend deux parties :

1) une publication quasi intégrale de deux textes rédigés par Marx en 1881 et destinés à Engels dans lesquels Marx expose sa conception du calcul différentiel et la méthode qu'il estime avoir découverte. Cette partie comprend plusieurs brouillons et variantes. C'est elle qui a été retenue par M. Endemann pour l'édition allemande de 1974 et également par C. Aronson et M. Meo pour l'édition anglaise de 1983. Nous en publions ici la traduction intégrale accompagnée des notes et des éléments critiques des éditions russe, allemande et anglaise ;

2) des extraits des manuscrits rangés de façon chronologique :

a) avant 1870 (22 pages environ),

b) les années 70 (190 pages environ),

c) compléments sur les années 80 (90 pages environ).

Ces 320 pages comportent des résumés par les éditeurs russes et la traduction russe d'extraits publiés dans la langue de Marx (la langue de travail de Marx : 93% d'allemand, *5%* d'anglais, 1% de français, *\%* de divers idiomes); quoique l'on soit très loin des 1 000 pages annoncées pour

[29] D'après Smolinski, un essai de Marx sur le concept de fonction était paru en 1958 dans *Voprosy Filosofi.*

une publication intégrale – qui ne s'impose sans doute pas – on croit sans peine que cela représentait un travail écrasant auquel Mme Janovskaja a consacré sa vie (cette chercheuse appartenait déjà à l'équipe de publication de 1927 et elle est décédée peu de temps avant la publication de 1968 alors qu'elle était à la tête de l'équipe préparant cette édition). Il fallait, en effet, non seulement déchiffrer l'écriture de Marx, classer des feuillets à la pagination complexe, mais surtout trier les notes de lectures reproduisant littéralement des ouvrages, les résumés comportant des remarques critiques plus ou moins nombreuses et enfin la partie originale. Finalement, bien que nous n'ayons eu accès aux commentaires russes qu'indirectement et partiellement, nous pensons qu'il s'agit là d'un travail très remarquable, cherchant à donner une image exacte des travaux mathématiques – au sens restrictif de ce terme – de Marx[30].

Sous les réserves indiquées concernant tes biais éventuels qui peuvent affecter l'édition russe, on note le déséquilibre dans le temps de ces travaux de Marx et encore la répartition par décennie était-elle trompeuse : la majeure partie des travaux mathématiques présentés sont concentrés sur quelques années : 1878–1882. Il faut naturellement rappeler que les éditeurs russes ont choisi de ne publier que les fragments les plus originaux c'est à dire ceux dans lesquels Marx se démarque soit par la critique soit par l'originalité des ouvrages qu'il utilise et c'est pourquoi nous n'attacherons pas davantage d'importance à la chronologie des différents travaux. Il nous paraît établi qu'à partir des années 1860 au moins, l'intérêt de Marx pour les mathématiques a été constant. Dès lors il est secondaire qu'il y ait ou non concordance dans le temps entre les « études » de Marx et sa production « originale ».

L'appareil critique de l'édition russe a largement exploité les ouvrages utilisés par Marx dans les appendices que nous avons repris. Comme il s'agissait souvent d'ouvrages français – que Marx consultait soit dans la langue originale sou en traduction – nous avons recherché les passages originaux et ce sont ceux–là que nous présentons dans celte édition. La qualité de l'appareil critique de l'édition russe est tout a fait remarquable, ce qui n est pas étonnant compte tenu des travaux de l'école russe en matière

[30] L'appareil critique de l'édition russe a largement exploité les ouvrages utilises par Marx dans les appendices que nous avons repris. Comme il s'agissait souvent d'ouvrages français – que Marx consultait soit dans la langue originale sou en traduction – nous avons recherché les passages originaux et ce sont ceux-là que nous présentons dans cette édition. La qualité de l'appareil critique de l'édition russe est tout a fait remarquable, ce qui n’est pas étonnant compte tenu des travaux de l'école russe en matière d'histoire des sciences. Naturellement, le choix consistant à écarter toutes les applications économiques constitue en lui-même un biais sur lequel on peut s'interroger : ne s'agit-il pas de protéger une orthodoxie marxiste mise à mal par Marx lui-même ? Comme nous le verrons, plusieurs passages semblent conforter cette interprétation et nous y serons particulièrement attentif sans chercher à tout prix à découvrir un « autre Marx ».

d'histoire des sciences. Naturellement, le choix consistant a écarter toutes les applications économiques constitue en lui–même un biais sur lequel on peut s'interroger : ne s'agit-il pas de protéger une orthodoxie marxiste mise à mal par Marx lui–même ? Comme nous le verrons, plusieurs passages semblent conforter cette interprétation et nous y serons particulièrement attentifs sans chercher à tout prix à découvrir un « autre Marx ».

Nous allons décrire rapidement ces travaux et les ouvrages utilisés par Marx :

a) Avant 1870 :

Marx s'intéresse essentiellement à l'arithmétique, probablement en relation avec ses travaux économiques. À partir de 1869, il utilise un ouvrage allemand de Feller et Odermann qui est un exposé d'arithmétique appliquée à l'économie de l'Allemagne. En effet, celle–ci avant 1871 étant divisée en un grand nombre d'États, chacun avait sa monnaie – définie par rapport à l'or ou à l'argent – et ses propres unités de mesures, de sorte que les échanges posaient de véritables casse–têtes pour convertir monnaies et unités de mesure. On peut relever, en passant, que l'ouvrage de Feller et Odermann propose une péréquation des dommages en cas d'avaries qui pourraient avoir servi de modèle à Marx pour la péréquation des profits du *Livre III.* Simplement, Marx a exposé le principe de la péréquation – sous une forme certes frustre – dans une lettre à Engels de 1863 tandis que les exercices de mathématiques financières de Marx – à partir de Feller et Odermann – sont datés de 1869. La question d'une influence éventuelle reste posée puisque d'une part l'ouvrage de Feller et Odermann est paru à Leipzig en 1854 et que d'autre part, on sait que Marx a travaillé certains ouvrages sans qu'il en existe des traces dans ses manuscrits[31]. Enfin, sans rapport direct avec ces travaux, on trouve durant cette période des notes sur l'histoire des mathématiques à partir surtout de l'ouvrage de Poppe et des textes originaux de Boetius et sur le calcul différentiel à partir du cours de l'Abbé Sauri[32].

[31] Nous savons, par exemple, par la lettre de Engels du 30 mai 1864 citée plus haut, que Marx avait travaillé le livre de Francœur – probablement l'arithmétique – pourtant cet auteur n'apparaît nullement dans les travaux de Marx si ce n'est dans une remarque de Marx dans le texte de 1881, au point que les éditeurs russes ne semblent pas avoir très bien situé la remarque de Marx, comme en témoigne leur note n°22, *cf. infra* p. 240 ; on sait aussi qu'en 1858, Marx étudiait l'arithmétique, il n'est donc pas exclu qu'il ait eu connaissance, dès cette période, de Feller et Odermann.

[32] Le cours – énorme – de l'abbé Sauri se situe dans la ligne de Leibniz, d'après les éditeurs russes. En fait, il parait surtout obscur et hésitant pour interpréter les infiniment grands et les infiniment petits, *%,* etc. Il cite abondamment Euler, mais reste très critique à son égard.

b) Les années 1870 et 1880

Outre les ouvrages de Feller, Odermann et Sauri, Marx a surtout utilisé le cours de calcul différentiel de Boucharlat ainsi que ceux de Hind et Hall. Les travaux présentés portent quasi exclusivement sur le calcul différentiel. Dans la masse des manuscrits présentés, nous n'avons relevé que deux allusions à des applications possibles à l'économie ou au calcul économique au sens large. Il s'agit tout d'abord d'un extrait de mathématiques financières tiré en mars 1878 de Feller et Odermann dans lequel Marx semble reprendre à son compte des remarques sur le coût d'opportunité – nécessité de calculer des intérêts pour un capital qui ne peut être utilisé[33]. Ensuite, Marx relève l'application possible des logarithmes dans les calculs financiers. Plus précisément, il étudie les propriétés des fonctions puissances dans les calculs d'actualisation. Il est remarquable que Marx emploie le terme « present value » et étudie une application numérique (la valeur actuelle d'une rente perpétuelle avec un taux de 5% n'excède celle d'une rente sur 99 ans que de *Vus)* sans l'assortir de commentaires négatifs quand on sait que dans le calcul des investissements dans l'économie soviétique, le rejet de l'actualisation a servi de trébuchet pour séparer l'orthodoxie socialiste des hérésies capitalistes. Mais ces – maigres – notations sont les seules remarques de Marx sur des utilisations possibles des mathématiques en général et du calcul différentiel en particulier[34]. Par contre, Marx commence dès cette période à s'intéresser à l'histoire du calcul différentiel et son intérêt porte sur les ouvrages de Lacroix et d'Euler Marx fait une large place à D'Alembert dans ses recherches historiques, mais hormis les articles de *L'Encyclopédie,* naturellement, nous n'avons pas trouvé mention de ses sources bibliographiques. Mais au tournant des années 80, Marx va retracer l'origine des concepts et des démonstrations – en particulier de la formule du binôme – jusqu'au XVIIe travaillant les ouvrages originaux – le cas échéant en comparant les éditions successives – de Newton, Taylor et Mac Laurin.

Après avoir ainsi décrit les manuscrits mathématiques de Marx, il convient de les situer par rapport aux travaux économiques que Ton place généralement au cœur des préoccupations de Marx, avant de les examiner en eux–mêmes.

---

[33] *Cf.* Janovskaja. p. 310.

[34] Les remarques sur l'actualisation de Marx sont à la page 372. Smolinski déclare avoir relevé, pour sa part une seule remarque sur des applications possibles des mathématiques (à l'astronomie).

CHAPITRE II

LES MATHÉMATIQUES ET L'ÉCONOMIE DE MARX

L'intérêt de Marx pour les mathématiques de même que ses compétences en la matière ne doivent pas être déduits hâtivement de ses seuls résultats au baccalauréat et des études universitaires ultérieures[35] Marx s'est efforcé de compléter sa formation initiale. Nous avons vu que cette préoccupation s'était manifestée tout au long de la vie de Marx, comme en témoignent les notes et travaux plus ou moins élaborés qu'il a laissés les allusions dans sa correspondance et ses propos tels qu'ils ont été rapportés par ses relations (essentiellement, Engels, son gendre P. Lafargue, et Kovalevski, un historien russe, rencontré par Marx en différentes occasions à la fin des années 1870 et dans les années 1880). Les commentaires de Janovskaja et Endemann subordonnent l'étude des mathématiques à celle de l'économie politique : Marx aurait travaillé les mathématiques pour approfondir son économie politique. En vérité, il n'y a guère d'éléments pour étayer cette interprétation. On trouve simplement la lettre de Marx à Engels du 31 mai 1873 reproduite ci-dessus (intégralement en ce qui concerne le problème étudié).

Il s'agit là d'un texte capital pour la conception marxienne des rapports entre les mathématiques et l'économie en général, mais il n'indique pas directement une relation entre les travaux mathématiques de Marx et la préparation de son économie politique.

Outre cette lettre de 1873, on connaît l'existence d'un manuscrit intitulé: « Traitement Mathématique du taux de profit et du taux de plus-value» rédigé par Marx en 1875. Ce « traitement mathématique » qui a été

---

[35] En 1872, Henri Poincaré a, certes, obtenu le premier prix au concours général de mathématiques, mais il a eu beaucoup de peine à obtenir le baccalauréat en raison d'un zéro... en mathématiques (cf. Pierre Humbert, p. 641).

écarté de l'édition russe des Manuscrits, a fait l'objet d'une description et d'une présentation par L. Smolinski en 1972[36]. Ce travail de Marx était connu également par les indications fournies par Engels dans la préface du Livre III du Capital. Pour le chapitre III (intitulé « Relation entre le taux de profit et le taux de plus-value »), il y avait toute une série de calculs mathématiques incomplets, mais il y avait en outre un cahier entier, presque complet, datant des années soixante-dix, sous forme d'équations, il expose le rapport entre le taux de plus-value et le taux de profit. Mon ami Samuel Moore (...) était, en vieux mathématicien, formé à Cambridge, bien plus qualifié que moi pour se charger du travail d'élaboration de ce cahier. A l'aide de son résumé et en me servant quelquefois du manuscrit principal, j'ai alors composé le chapitre III. On aurait pu s'attendre à ce que l'édition des Manuscrits Mathématiques reprenne ce « cahier presque complet ». Or il n'en est rien et alors qu'il est abondamment annoté par Moore, on ne voit apparaître le nom de celui-ci dans le livre de Janovskaja que très marginalement, (trois fois au total lorsque Janovskaja mentionne la lettre de 1873 et celle de 1882 dans son introduction). A ce sujet, elle est beaucoup moins circonspecte que Engels. Pour elle, « sa compréhension des mathématiques » était plutôt limitée. Moore ne pouvait rendre aucun service essentiel à Marx. En outre, comme peut en juger d'après ses remarques sur le manuscrit de 1881 contenant les idées de Marx sur la dérivation et le sens du calcul différentiel symbolique, Moore ne comprenait tout simplement pas ses idées. Ce jugement est intéressant parce qu'il montre comment la moindre restriction sur les travaux de Marx venant pourtant d'un « ami » – nous n'avons rien trouvé de négatif sur Moore dans la correspondance Marx et Engels, ce qui, en outre, n'est pas si fréquent, eu égard à leur pratique habituelle –, est balayée sans ménagement et sans précaution : s'il fallait suivre Janovskaja, cela signifierait que le *Livre III*, dont la composition doit tant à Moore, serait éminemment suspect de trahir la pensée de Marx !

Mais il convient d'examiner les indications disponibles sur ce document. Ce cahier fait plus d'une centaine de pages. Il part des définitions habituelles du taux de profit marxien $p' = \frac{m}{c+v}$ et du taux de plus-value : $m' = \frac{m}{v}$.

Marx en tire correctement une expression de l'inverse de la composition organique du capital.

$$\frac{p'}{m'-p'} = \frac{v}{c}$$

[36] Nous espérons pouvoir publier ultérieurement ce chapitre du *Capital*.

Mais ensuite Marx prend des valeurs numériques pour les différentes variables et dans une longue série d'exemptes numériques, Marx étudie quels seront les effets sur le taux de profit, p', si la valeur de l'une de ces variables augmente ou diminue d'une quantité donnée tandis que les autres restent constantes – un substitut de la différentiation partielle, plutôt insatisfaisant[37] : Il apparaît, ainsi, que l'étude des mathématiques – et en particulier de l'algèbre – que Marx se promettait de réaliser dans sa lettre du 11 janvier 1858 à Engels n'a pas eu de conséquences notables sur sa méthode en économie. Les critiques de S. Moore méritent d'être citées : « La grande longueur de ce traitement mathématique provient de l'habitude de Marx de prouver ses résultats par des exemples concrets et de consacrer des pages et des pages à la discussion de chiffres, tandis qu'en prenant des formules générales, ...applicables à ce cas particulier ses résultats pourraient être obtenus en une demi-douzaine de lignes ». On ne peut manquer de faire un rapprochement entre cette critique de Marx par Moore et la critique de Francœur par Engels dans sa lettre à Marx du 30 mai 1864. Il est même permis d'imaginer que Engels visait moins l'arithmétique de Francœur que celle de Marx et qu'il avait saisi l'occasion pour faire la leçon à Marx. Marx, durant l'année 1863, avait travaillé le calcul différentiel d'une part et repris sa rédaction du *Livre III*, d'autre part. Les remarques de Engels sur la force des raisonnements algébriques comparées aux exemples arithmétiques ne paraissent pas évidentes à l'examen du livre de Francœur, par contre, elles seraient un commentaire beaucoup plus approprié aux propres travaux de Marx. Critique oblique et amicale, alors ? Peut-être car en 1864, Engels est suffisamment inquiet des difficultés qu'éprouve Marx à rédiger pour éviter une critique directe qui pourrait retarder encore plus l'économie de Marx. Quoiqu'il en soit, la critique était peut-être trop indirecte, Marx n'en a pas moins continué à utiliser pour l'essentiel les mêmes outils d'analyse que dans les années 1870, recourant à des exemples numériques plutôt qu'à des formulations générales et il n apparaît pas de conséquences explicites dans ses travaux économiques des études mathématiques, conduites antérieurement ou parallèlement.

Ainsi, en dehors de la lettre de 1873 (qui est négative par son contenu effectif puisque Marx y annonce qu'il renonce à trouver une solution mathématique à l'analyse d'un problème économique) et d'une allusion dans une lettre de 1858, on ne trouve pas de relation entre les mathématiques et l'économie explicitement reconnue par Marx (ni par Engels – à notre connaissance). Il est même frappant de trouver aussi peu de références aux applications des mathématiques en économie ou dans d'autres disciplines que Marx étudiait.

---

[37] L. Smoiinski, p. 11.

Marx indique simplement que le calcul différentiel est indispensable à Engels pour sa formation « militaire » (probablement pour la balistique). Aussi, les auteurs qui mettent en avant cette perspective utilitaire à l'intérêt de Marx pour les mathématiques sont conduits à réinterpréter le *Capital* et/ou à s'appuyer sur des témoignages indirects. Il existe, en effet, deux relations de confidences de Marx à Lafargue et à Kovalesvski qui concernent plus ou moins la question débattue. Tout d'abord, en 1891, comme nous l'avons déjà signalé, P. Lafargue soutient que selon Marx « une science n'est pas réellement développée tant qu'elle n'a pas appris à utiliser les mathématiques » et ensuite, en 1909, Kovaleski affirme que Marx avait repris ses études sur le calcul différentiel au milieu des années 70 « pour se former une opinion en connaissance de cause sur l'école mathématique que dominait alors Jevons »[38]. Or sans mettre en doute ces témoignages quoi-qu'ils soient très postérieurs aux années 1870, on est forcé de constater que l'on ne trouve pas chez Marx de quoi les étayer (le nom de Jevons, en particulier, dont la *Theory of Political Economy* était parue en 1871, rééditée en 1879, n'apparaît jamais, pour autant que l'on sache, sous la plume de Marx. Il est vrai qu'en 1879 Jevons, lui-même, adopte dans sa préface un ton de plaidoirie « pro domo » qui fait douter de sa popularité en Angleterre même.

Il reste finalement à examiner les écrits économiques de Marx pour apprécier l'utilisation éventuelle de ses travaux mathématiques. Naturellement, dans les années 1870, Marx ne pouvait guère trouver dans les mathématiques de l'époque les outils qui lui auraient permis, par exemple, de traiter les relations valeur/prix à la Sraffa. En effet, les progrès décisifs en algèbre linéaire sont, pour l'essentiel de la fin du XIXe (Cayley, Hamilton, Frobenius) et du vivant de Marx n'étaient guère connus en dehors d'un cercle étroit de spécialistes. Par contre, il y a deux domaines dans lesquels on s'attendait à voir apparaître des formulations mathématiques, les schémas de reproduction et la baisse tendancielle du taux de profit, en effet, les mathématiques étudiées par Marx apparaissent particulièrement appropriées au traitement de ces questions. Dans le cas des schémas de reproduction élargie, la plus-value d'une période vient en partie accroître à la période suivante le capital variable dont elle dépend et le capital constant qui dépend également du capital variable à travers la composition organique du capital. On s'attendait par conséquent à un traitement soit à l'aide d'équations différentielles, soit à l'aide d'équations aux différences finies. Or, sans remonter aux ouvrages d'Euler, les manuels utilisés par Marx –

[38] Les citations de Lafargue et Kovaleski sont extraites de *Souvenirs de Marx et Engels*, Moscou, 1956. Elles sont reprises aussi bien par Kolman que par Smolinski. Ce dernier ajoute que l'article de Lafargue paru a l'origine dans *Neue Zeit* 9, n° 1 (1891) pp. 10-17 et celui de Kovaleski dans *Vestnik Europy*, 1909, n° 7, pp. 5-23.

notamment Boucharlat et Francœur – présentaient le calcul des différences et la résolution des équations différentielles, dont on ne trouve aucune utilisation dans le Livre IL Les querelles d'interprétation entre R. Luxembourg et V. Lénine sur le sens de ces schémas viennent largement pour reprendre F. Engels de ce « qu'on rend les choses moins visibles en se limitant à des nombres ». La situation est encore plus nette en ce qui concerne la baisse tendancielle du taux de profit.

Les formules de Marx présentent le taux de profit comme une fonction de la plus-value, du capital variable, du capital constant. On s'attend donc à ce que l'évolution du taux de profit soit étudiée à l'aide des dérivées du taux de profit par rapport à ces variables ; il s'agit en outre d'une étude très délicate – en effet, si l'on fait apparaître en suivant Marx le taux de plus-value au numérateur, la composition organique du capital au dénominateur, il ne faut pas oublier que cette dernière est elle-même une fonction du taux de plus-value. On doit tenir compte de toutes ces relations pour pouvoir déterminer l'influence d'une élévation de la composition organique du capital sur le taux de profit. Mathématiquement, le recours au calcul infinitésimal paraît approprié. Or, on ne trouve rien de tel dans le Livre III où la « loi » de la baisse tendancielle du taux de profit est « obtenue » en postulant une élévation de $\frac{c}{v}$ qui entraîne, pour $\frac{pl}{v}$ constant, une baisse du rapport $\frac{pl/v}{1+c/v}$.

Puis Marx identifie explicitement six causes susceptibles de contrecarrer la loi, mais une lecture attentive du texte montre que des cas plus nombreux et plus complexes encore sont envisagés ; par exemple, Marx retient la baisse éventuelle du prix des éléments du capital constant (cause n° 3). L'argument principal vise une hausse en valeur du capital constant plus faible que l'accroissement matériel, mais à l'intérieur de cet argument, Marx indique que « dans tel ou tel cas, la valeur peut même baisser », c'est-à-dire une situation dans laquelle la tendance peut être non seulement contrecarrée ou modérée mais totalement inversée... Certes, il s'agit là de questions extrêmement complexes qu'il est difficile d'exposer dans un « discours » totalement cohérent.

Le recours à la formalisation serait ici particulièrement bienvenu, ne serait-ce que pour assurer et exposer les résultats. En outre, le calcul différentiel est, prima facie, tout à fait approprié pour décrire une variation, c'est pourquoi nous voulons simplement souligner, ici, que l'absence d'utilisation des outils mathématiques contenus dans les ouvrages dont disposait Marx ne peut être trop soulignée. Si l'on veut absolument attribuer aux travaux mathématiques de Marx une origine dans des préoccupations économiques, alors on ne pourrait trouver de justification à notre avis que dans une interprétation ouvertement iconoclaste pour l'économie marxiste ; cette interprétation aurait le mérite d'expliquer pourquoi Marx n a jamais publié les Livres II et III dont tous les auteurs marxistes soulignent et soutiennent que le contenu était formé, sinon arrêté, parfois plusieurs années avant la rédaction finale du Livre I (ainsi l'idée des prix de production distingués des valeurs remonte au moins à 1863 tandis que le Livre I est paru en 1867 et qu'Engels n'a finalement publié le Livre III à partir des manuscrits de Marx qu'en 1894).

Cette interprétation est la suivante : Marx s'aperçoit fin des années 1850, début 1860 de la nécessité pour une définition rigoureuse de ses *Principes d'économie politique* d'un recours aux mathématiques. Mais plus il approfondit les mathématiques – et le détour par Newton et Euler dans les années 1870 est gigantesque – plus grand lui apparaît le dilemme auquel il est confronté : soit publier en l'état des propositions dont il ne peut pas ne pas voir l'insuffisance des démonstrations, soit chercher à les rendre rigoureuses mais alors au prix de quelles modifications ? Pris dans ce dilemme, malade en outre dans les années 70/80, Marx n'aurait trouvé aucune solution si ce n'est de confier ses manuscrits à Engels pour qu'il en « fasse quelque chose », lui-même n'arrivant pas à une rédaction « qui lui donnait satisfaction »[39] Si l'on veut admettre avec Maurice Godelier que « Marx avait le projet de constituer une théorie mathématique de l'Économie » ; il faut bien constater qu'il n'a pu le mener à terme et il conviendrait de modifier en conséquence l'évaluation du *Capital*[40] Cela amène en effet à considérer le *Capital* comme une tentative inachevée - et alors la méthode des exemples numériques devient beaucoup plus acceptable comme un élément de « l'Art de la découverte » tel que l'exposent George Polya et d'autres mathématiciens[41] - par contre, aussi, il est absurde de prendre à la lettre les formulations du *Capital.*

Nous ne pensons pas que l'on puisse échapper facilement à l'alternative suivante: soit s'en tenir à la lettre de Marx et refuser les mathématiques, soit admettre le projet marxien d'appliquer les mathématiques à l'économie et accepter la liberté de recherche en économie impliquant des « révisions » éventuelles plus ou moms importantes par rapport à la lettre de Marx. On pourrait plagier la langue d'un certain matérialisme historique et dire que ce n'est pas un hasard s'il a fallu attendre

---

[39] . Nous reprenons ici les expressions mêmes d'Engels dans sa préface de 1885 au Livre II.

[40] Maurice Godelier, p. 132. Cet auteur fait des rapports entre Marx, les mathématiques et l'économie une analyse assez intéressante par endroits, mais il conclut (?) par une note en bas de page qui nous parait pour le moins obscure: «De plus, l'essentiel pour lui était moins l'élaboration d'une théorie mathématique que d'une théorie « caégoriale » de l'économie politique». Nous restons perplexes devant cette opposition

[41] Pour un expose sur ce point voir le chapitre *L'art de la découverte de Polya* dans Hersh et Davis.

si longtemps la publication des manuscrits mathématiques de Marx et si celle-ci reste incomplète à ce jour. On peut relever, en effet, que ce sont les parties de mathématiques pures qui ont été publiées au début des années 30 quand le régime soviétique emprisonnait les économistes mathématiciens, que c'est une sélection d'extraits qui a vu le jour en 1968, un travail de longue haleine manifestement programmé sous l'ère khrouchtchévienne, mais que le « traitement mathématique des rapports entre le taux de plus-value et le taux de profit » reste à publier.

Malgré le plaisir que l'on peut éprouver à retourner des arguments dogmatiques – pour être plus fidèle à Marx, prenez vos distances vis-à-vis du *Capital* –, il faut apporter deux réserves importantes à l'interprétation précédente. Tout d'abord, le projet attribué à Marx d'une économie mathématique ne repose que sur la lettre à Engels de 1873 et sur le manuscrit non publié traitant « mathématiquement » des rapports entre taux de plus-value et taux de profit. On ne trouve pas non plus chez Marx de références aux premiers économistes mathématiciens ; il ne semble avoir connu ni Von Thünen, ni Gossen, ni Dupuit, ni Cournot, dont les publications sont antérieures à 1850, pour ne rien dire de Jevons, Menger ou Walras dont il aurait pu connaître les travaux de la fin des années 70 début des années 80.

Ensuite, l'image d'un Marx hésitant dans ses affirmations intellectuelles, même devant la rigueur mathématique, correspond assez peu au personnage qui traite de haut les capacités intellectuelles de tous les autres chercheurs. Il est vrai que c'était peut-être moins la conception de son projet qui l'arrêtait que les étapes ultérieures de réalisation pratique et là, on trouve une lettre à Engels d'une modestie assez étonnante. Marx voulait comprendre le développement technologique sous le capitalisme et suivait des « cours du soir » sur la mécanique. Or, il écrivait à Engels le 28 janvier 1863 - et il s'agit de l'époque durant laquelle il commençait à étudier le calcul différentiel- : « Je réagis à la mécanique comme aux langues, je comprends les lois mathématiques mais face à la plus simple réalité technique nécessitant une vision concrète, j'éprouve plus de difficultés que le plus grand des imbéciles ». Le traitement qu'il inflige à MacLeod est finalement le seul dont on dispose pour établir son opinion vis-à-vis des recherches mathématiques en économie ; il n est guère nuancé et tout à fait dans le style de Marx : « M. MacLeod s'est quand-même débrouillé pour obtenir une seconde édition de son livre, minable, scolaire et affecté, sur les banques. C'est un âne imbu de lui-même qui met toute tautologie banale 1) sous forme algébrique et 2) en système géométrique ». (lettre du 6 mars ISS)[42]. Finalement, il nous semble que Marx n'a pas été guidé dans ses

[42] J. Schumpeter présente ainsi cet auteur : « H.D. Mac Leod (1821-1902) était un économiste plein de qualités qui, en quelque sorte ne parvint pas a se faire reconnaître, ou

travaux mathématiques seulement ou même, principalement par le souci des applications en économie.

La place qui doit être accordée aux préoccupations récréatives ou ludiques et philosophiques est, à notre sens, au moins aussi importante que celle du projet économique. C'est Marx lui-même qui le répète à maintes reprises à Engels au début des années 1860 alors même qu'Engels – son bailleur de fonds dans la misère où se trouve Marx – le presse d'achever son économie. 1858, 1860, 1863, 1881, Marx mentionne tout au long de sa vie, explicitement, dans ses lettres cette fonction de délassement, de loisirs, qu'ont pour lui les mathématiques ; au contraire, lorsqu'il est soucieux de formuler mathématiquement un problème économique comme celui du cycle, il s'adresse à celle de ses relations qui fait figure de spécialiste (1873), et ce n'est que de façon très vague « le détour par l'algèbre » qu'il relie ses recherches mathématiques à ses travaux économiques à la fin des années 1850. Certes, on ne peut écarter totalement l'argument qu'avance Mme Janovskaja : « Ainsi en 1869, en relation avec ses travaux sur la rotation du capital et le rôle des billets dans les relations entre gouvernements, Marx se familiarise avec l'important traité d'arithmétique commerciale de Feller et Odermann qu'il résuma en détail (cf. mss 2388 et 2400). Or, quand Marx rencontrait quelques problèmes qu'il lui semblait ne pas dominer, il ne s'estimait pas satisfait avant de les avoir totalement maîtrisés, jusqu'à leurs fondements. Cette façon de procéder est caractéristique de ses recherches. Chaque fois que Feller et Odermann employaient une technique mathématique, Marx estimait nécessaire de se la remettre en mémoire, même s'il la connaissait déjà. Dans ces résumés d'arithmétiques commerciales - cités ci-dessus et d'autres postérieurs - on trouve des insertions d'un contenu purement mathématique dans lesquelles Marx progressait toujours plus avant dans le domaine des mathématiques supérieures »[43]. Nous mentionnons intégralement cet argument parce qu'il renvoie à la pratique matérielle du travail de Marx telle que les manuscrits – au sens littéral – peuvent la laisser voir. L'opinion de Mme Janovskaja est donc intéressante compte tenu de sa familiarité exceptionnelle avec les MMM. En insistant de la sorte sur les effets en ricochets des préoccupations de Marx, on « explique » l'absence de références directes et on pourrait aller jusqu'à dire que si Marx ne mentionne pas la relation mathématiques-économie, c'est qu'elle lui paraît suffisamment évidente. Et c'est justement là que nous cherchons en vain les signes d'une telle relation. Un auteur dont les

---

même à être pris tout a fait au sérieux, en raison de son incapacité à présenter ses nombreuses bonnes idées sous une forme acceptable par la profession ». Schumpeter ajoute que dans ses trois ouvrages il posa les fondations de la théorie moderne de la monnaie de crédit quoique ce qu'il réussit vraiment â faire fut de discréditer cette théorie pour toute une période ».

[43] Schumpeter, p. 1115.

sympathies à l'égard du travail de recherche de Marx sont aussi grandes que Morishima est forcé d'admettre « que l'on convient généralement qu'il est impossible de trouver un germe de marginalisme dans le Capital, quoique Marx ait connu le calcul différentiel et intégral »[44]. Cette reconnaissance est doublement intéressante : a) Morishima se réfère aux MMM dont il connaissait l'édition russe de 1968, b) il s'efforce de montrer que la théorie marginaliste du consommateur peut être intégrée au modèle marxien.

Nous sommes revenu une dernière fois sur cette relation postulée de façon récurrente dans la littérature marxiste pour montrer la fragilité des arguments qui la contiennent, même si on ne doit pas l'écarter totalement, il faut bien admettre que Marx aimait les mathématiques, aussi, pour elles-mêmes, pour leurs vertus de rigueur et de gymnastique intellectuelle. Nous nous appuyons sur ce dernier point sur une lettre à Engels, de 1879 dans laquelle il déplore justement de ne pouvoir en faire, alors qu'il est allé quelques jours à la mer à Ramsgate :

> 25 août 1879
>
> Pour ce qui de ma tête, tout ne va pas encore pour le mieux. J'ai regardé hier certains cahiers de mathématiques, *à titre d'essai*, que j'avais emportés mais j'ai dû très rapidement abandonner ce travail prématuré, cela a servi seulement de test ».

En retraçant les rapports entre les mathématiques et l'économie marxienne, nous nous sommes volontairement tenus à l'élaboration et nous avons ainsi cherché – largement en vain – l'utilisation en économie des recherches mathématiques de Marx. Cette démarche est justifiée dans une présentation des *MMM*, mais elle laisse de côté la question capitale du statut des mathématiques effectivement utilisées par Marx en économie qui n'est traitée que partiellement. Les *MMM* ne contiennent pas explicitement d'examen des possibilités d'application des mathématiques dans les sciences sociales. Il s'agit pourtant d'une question capitale et nous ne pouvons que reprendre ici la présentation de la problématique par Endemann dans sa préface â l'édition allemande des *MMM :* « Nous estimons qu'il est possible d'établir une relation fructueuse entre les méthodes mathématiques et une analyse critique de la société dans laquelle celle-ci ne disparaisse pas derrière le formalisme mathématique et ne se cantonne pas non plus dans une position de défense bornée » et également : « Le problème principal, dans te domaine de ta théorie de la connaissance et du savoir, pour le développement d'une théorie sociale prenant au sérieux la dialectique matérialiste de Marx est celui du rapport inévitable entre le contenu de la théorie critique et sa formalisation mathématique, autrement dit la relation entre la dialectique d'une part, l'argumentation et l'exposition suivant la

[44] Morishima, 1973. p. 40.

logique formelle d'autre part »[45]. Les MMM ne peuvent, en eux-mêmes, apporter directement des réponses à ces problèmes, – ne serait-ce que par l'importance des changements intervenus en mathématiques depuis un siècle et demi; nous espérons, par contre, que leur publication permettra, en brisant certains tabous, du moins, de mieux formuler le problème.

[45] Marx/Endemann, 1974, préface et introduction de l'édition allemande des *MMM*.

CHAPITRE III

MÉTAPHYSIQUE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL « CLASSIQUE »

A – L'origine du calcul différentiel

Quelles qu'aient été les raisons qui animaient Marx au départ, il n'est pas étonnant qu'il se soit toujours tenu au calcul différentiel ou infinitésimal. C'est que celui–ci occupe une place très importante dans l'histoire du développement des mathématiques. On peut dire que depuis la mathématique grecque des questions comme celles de l'infini opposé au fini ou bien du continu opposé au discret sont apparues au centre de toutes les crises de mathématiques. (Les Anglais d'ailleurs, ne marquent–ils pas cette place capitale en désignant par « calculus » (sans épithète) le calcul différentiel en intégral) ? Mais il ne s'agit pas uniquement – ou même peut–être principalement – d'une question confinée aux mathématiques au sens technique du terme et à l'égard de ce thème de l'infini, il est particulièrement justifié de relever la mise en garde d'A. Koyré formulée précisément pour présenter B. Cavalièri et la géométrie des continus : « il est impossible de séparer la pensée philosophique de la pensée scientifique: elles s'influencent et se conditionnent mutuellement, les isoler, c'est se condamner à ne rien comprendre à la réalité historique »[45].

Mais au–delà de ce Zeitgeist, les problèmes de l'infini sont aussi bien l'objet même de la mathématique que de la philosophie ou de la théologie d'aujourd'hui et d'hier. Davis et Hersh montrent cette parenté en rapprochant « l'axiome » de Dieu présenté par Maimonide dans son commentaire de la Thora de l'axiome[46]46 de l'infini tire d'une introduction à la théorie des

[45] A. Koyré, 1973. p. 322. ci. pour l'idée dynamique d'un « esprit du temps », Schumpeter, p. 393. A sa suite nous conservons le mot allemand. *Zeitgeist.*
[46] Davis et Hersh, pp. 154-5.

ensembles. De même la présentation des thèses de Duns Scot sur la transcendance par Heidegger suggère souvent de tels rapprochements avec les nombres cardinaux de Cantor, ou entre « la catégorie des catégories » et « l'ensemble de tous les ensembles »[47].

C'est assez dire que traiter à fond de cette question exigerait une revue non seulement des mathématiques mais aussi de la philosophie et de la théologie qui déborderait évidemment de cette présentation. Nous nous contenterons, par conséquent, de quelques repères permettant de situer le travail de Marx, n'hésitant pas à prendre au sérieux – naïvement et littéralement – l'avertissement de Descartes : « C'est pourquoi nous ne nous soucierons pas de répondre à ceux qui demandent si la moitié d'une ligne infinie est infinie et si le nombre infini est pair ou impair, à cause qu'il n'y a que ceux qui s'imaginent que leur esprit est infini qui semblent devoir examiner de telles difficultés »[48]. En effet, c'est un domaine où se mêlent inextricablement la conception du réel et de la connaissance (place de l'intuition), la nature des mathématiques et leur rôle dans la connaissance.

Il n'est pas étonnant, dès lors, que ce soient très souvent les mêmes hommes que l'on retrouve en philosophie, en mathématiques ou en physique soit donnant les impulsions engendrant des crises soit tentant de grandes synthèses (Aristote, Galilée, Descartes, Newton, Leibniz, Kant, Hegel). Malgré l'évidente inter connexion de ces domaines, les études historiques qui en sont faites sont de plus en plus parcellarisées et spécialisées, de sorte que nous ne connaissons pas de synthèses diachroniques et synchroniques : ainsi, les histoires du calcul infinitésimal sont-elles peu dissertes sur le contexte philosophique et muettes sur les questions théologiques[49], l'histoire de la physique présente-t-elle souvent les mathématiques simplement comme une science auxiliaire fournissant un outil pour décrire le réel ; quant à la philosophie, il est à craindre que le jugement de Engels sur les disciples de Hegel du milieu du XIXe ne puisse s'appliquer également au XXe. Ainsi, E. Fleischmann qui, en 1968, s’abstenait de commenter, dans *la Logique de Hegel,* les notes consacrées au calcul infinitésimal, « faute de compétence » et parce qu'il estimait « entièrement a–mathématiques, leurs conclusions » présente un point de vue opposé en 1972 mais qui ne manque pas de surprendre :

> Jusqu'ici, nous l'avons vu, il s'agissait de confronter le dialectique de Hegel avec le discours mathématique considéré comme modèle de rationalité, ce qui est une entreprise assez banale. Maintenant il nous

---

[47] Heidegger, pp. 47-119.

[48] Descartes, cité par Koyré, 1962, p. 105.

[49] C. Bover est pratiquement muet, rien dans le livre techniquement et pédagogiquement parfait de CE. Edwards.

> faut démolir les arguments de Hegel contre le modèle mathématique qui est pour lui un faux critère de scientificité, démontrer que la pensée de Hegel elle–même n'est pas indépendante de considérations d'ordre mathématique et arriver à la conclusion – fort peu banale – que Hegel n'est qu'un mathématicien qui s'ignore. Dans ce contexte, il nous faut noter d'abord que les prises de position de Hegel contre le raisonnement mathématique datent du début du XIXe siècle, donc d'avant la constitution des mathématiques modernes. Il cite naturellement Leibniz et Newton et, de son époque, Euler et Ploucquetentre autres qui n'ont pas une place considérable dans l'histoire de la pensée mathématique. Si l'on se souvient que la renaissance du calcul n'intervient qu'avec Boole et de Morgan et que les principaux concepts mathématiques se constituent chez Cantor seulement, il est compréhensible que malgré son estime pour le calcul infinitésimal Hegel pouvait se méprendre sur la véritable nature de la pensée mathématique. Il est dommage qu'il n'y voyait (surtout dans l'algèbre, le calcul leibnizien et l'arithmétique) qu'une façon de penser mécanique et « extérieure », aussi ennuyeuse que le syllogisme traditionnel qu'on peut confier aux machines à calculer au lieu de torturer avec cela professeurs et écoliers. Tout ceci a peut–être son origine dans une simple ignorance ou un manque d'information.

Nous partageons le jugement selon lequel la pensée de Hegel n'est pas indépendante de considérations mathématiques, mais nous croyons la relation mathématique–logique beaucoup plus étroite que ne le laisse entendre Fleischmann de telle sorte qu'il est impensable que Hegel ait pu « l'ignorer ». Nous montrerons également que Hegel était parfaitement au courant de la mathématique et de son histoire,(ce qui ne semble pas être le cas de Fleischmann, si l'on en juge par son jugement sur Euler !)[50]. Mais auparavant, nous devons présenter l'apparition du calcul infinitésimal classique.

Si les problèmes mathématiques et philosophiques liés à l'infini sont très anciens et remontent, au moins, aux mathématiques grecques, on peut admettre l'idée d'un tournant au XVe dans la mesure où en face de la spéculation intellectuelle sur l'infini vont apparaître des observations de l'univers imposant une transformation des conceptions de l'espace et du temps.

---

[50] L. Euler passe pour avoir été le mathématicien le plus prolifique de tous les temps et son nom a été donne â un nombre considérable d'objets mathématiques (*cf.* Harthong. Hersh Davis, Cantor...). Les références à Fleischman sont : 1968, pp. 102-103. 1972 pp. 39-40.

A ce moment, « la bulle du monde a commencé par enfler et s'élargir avant d'éclater et se perdre dans l'espace dans lequel elle était plongée »[51] C'est dans ce contexte que va naître le calcul infinitésimal qui est une tentative pour surmonter les paradoxes sur lesquels bute l'esprit humain quand il rencontre l'infini. Ainsi, les quatre paradoxes de Zénon « Achille et la tortue », « la flèche », « la dichotomie » et « le stade » naissent de la considération des grandeurs infiniment petites et infiniment grandes. Ils montrent les contradictions qui minent le mouvement si l'on admet une divisibilité infinie du temps et de l'espace. Zénon ne voulait, sans doute, pas nier le mouvement comme semblait le croire Diogène, mais montrer que l'infiniment petit (dans le temps ou dans l'espace) ou l'infiniment grand (en nombre de périodes ou d'intervalles) était signe de contradiction. Il est sans doute injuste pour la philosophie scolastique de sauter de la mathématique grecque à Kepler, Galilée et au XVIIe ; en effet, que ce soit en philosophie, – la réflexion sur les infinis potentiels et actuels – ou en mathématique, – les travaux sur les séries infimes –, le Moyen-âge n'a sans doute pas été un trou noir. Néanmoins, outre les contraintes de brièveté, deux raisons peuvent être avancées pour ne pas s'attarder sur cette période: d'une part, il est incontestable qu'il y a, de Cavalieri ou Galilée à Newton, une accélération très nette, la réflexion progresse beaucoup plus vite que dans les siècles antérieurs, d'autre part, c'est bien aux méthodes de calcul des « Anciens » (essentiellement les *anciens* Grecs) que Newton et Leibniz soutiennent qu'il faut comparer celles qu'ils proposent.

Mais avant de présenter quelques traits de ces méthodes, il importe de revenir brièvement sur les origines du tournant des XVIe et XVIIe siècles. Nous avons mentionné et là spéculation intellectuelle et les observations et nous insistons sur cette dualité: le calcul avec les infinitésimales n'est pas une simple projection de la lunette de Tycho Brahé même si souvent les mêmes hommes se sont intéressés à l'astronomie et au calcul infinitésimal.

Nous ne souscrivons pas aux thèses mécaniques « expliquant » les ruptures théoriques par une accumulation pratique antérieure qu'il s'agisse de la géométrie et de l'arpentage des Égyptiens ou bien du calcul infinitésimal et l'astronomie ou la navigation. Dans le domaine considéré, on pourrait rappeler à rencontre de la pratique, mère de la théorie, deux contre–exemples, de nature opposée mais complémentaire : Tycho Brahé a, par ses observations, repoussé les limites de l'univers de façon énorme (par rapport aux connaissances antérieures), mais c'est Kepler qui a pu interpréter ses résultats. Leibniz, par contre, ne semble pas avoir été conduit, par l'intuition sous une forme quelconque aux bases de son calcul infinitésimal et l'astronomie en particulier ne joua aucun rôle important. Ainsi, le Zeitgeist

[51] Koyré, 1962, p. 5.

qui mène de Nicolas de Cues à Newton et Leibniz a trop aimé bousculer les idées reçues pour se laisser enfermer dans des schémas simplificateurs. Enfin s'il convient bien d'établir une relation entre le monde qui enfle et l'infini mathématique, il faut marquer une différence essentielle: vis–à–vis de l'univers infini peut être mise en œuvre la distinction qui remonte aux Grecs entre infini actuel et infini potentiel. Arrêtons nous un instant sur ce point.

Aristote, notamment, a nié l'existence de l'infini en acte (actuel). Le concept d'infini désigne alors une simple possibilité, –on entend, par la suite par « infini potentiel », un infini dont on considère les parties comme données ou construites successivement, l'ensemble des parties n'existe donc qu'en puissance seulement. Au contraire, si l'on considère les parties – et par suite les éléments – comme données simultanément, on parlera « d'infini actuel ». La théologie chrétienne, dans son orientation majoritaire, s'est efforcée de montrer que l'infini– « l'être tel qu'on n'en saurait concevoir de plus grand » – ne pouvait définir que Dieu, objet de la foi, révélé dans les Écritures. La distinction actuel/potentiel était dès lors très bienvenue puisqu'il est clair, d'une part que l'infini potentiel ne menace pas le statut attribué à Dieu, d'autre part qu'il est « suffisant » pour l'univers – même élargi – du XVIIe siècle. Théologiens et physiciens pouvaient donc s'appuyer sur elle pour refouler les monstres logiques que la considération de « l'infini » faisait apercevoir. Au contraire, en mathématique, il est tentant de « capturer l'infini actuel » ce que le Marquis de l'Hospital croyait avoir réussi dans le calcul infinitésimal, (ce à quoi Cantor et ses successeurs estiment être parvenu deux siècles après avec sa théorie des ensembles infinis). Philosophe, mathématicien, physicien, mais aussi croyant, soumis à l'Église, Descartes s’en remettait à la fameuse distinction qu'il reformule de la façon suivante :

« Et nous appellerons ces choses indéfinies plutôt qu'infimes afin de réserver à Dieu le nom d'infini, tant à cause que nous ne remarquerons point de bornes en ses perfections, comme aussi que nous sommes assurés qu'il n'y en peut avoir »[52]. Descartes marque ici les limites à ne pas franchir: il est un domaine où les textes sacrés font autorité, ou dans lequel, au moins l'autorité appuie les textes sacrés. C'est que l'on est dans un temps où l'exploration conceptuelle a conduit au bûcher Giordano Bruno qui, estimant impossible d'assigner des limites à l'action créatrice de Dieu, croyait au monde infini quoiqu'il n'ait cessé de se considérer comme chrétien. Certes, les *Principia Mathematica* de Newton sont de 1687, c'est–à–dire un siècle après le *De l'infinito universo e mondi* (1584) de Giordano Bruno, mais la prudence autant que la modestie inspire-t-elle Descartes quand il dit « qu’il

[52] Descartes, *Principia Philosophiae,* § 22, cité par Koyré, 1962, p. 106

ne faut pas chercher de comprendre l'infini mais seulement penser que tout ce en quoi nous ne trouvons pas de bornes est indéfini »[53]. La théologie – et la coercition qu'elle peut exercer ou justifier – est donc inextricablement mêlée à l'origine du calcul infinitésimal. Elle apparaît même dans le casse–tête déjà suffisamment embrouillé que constitue la querelle de priorité Newton–Leibniz. Ainsi, comme l'a relevé A. Koyré, Leibniz, attaqué, suspecté de plagiat ! contre-attaqua en laissant planer un doute sur l'athéisme des positions newtoniennes[54]. En outre, pour retracer ces conflits, il ne faut pas oublier que les combattants n'ont cessé d'avancer à visage couvert: c'est René Guénon qui relève les références rosicruciennes affichées par Leibniz[55]. C'est H. Lincoln qui montre que Newton qui passa la fin de sa vie à déchiffrer la Bible fut probablement le chef des sociétés ésotériques anglaises. A toutes ces activités, Newton a ajouté des recherches alchimiques importantes au point que l'Encyclopédie Britannique estime « le temps et l'énergie qu'il consacra à l'alchimie égalent probablement ce qu'il donna à la physique ou aux mathématiques ». Mais comme ses manuscrits non scientifiques restèrent longtemps en possession des descendants de la nièce de Sir Isaac, ils n'ont pas encore fait l'objet d'étude vraiment complète d'autant que la tâche est ardue : « il emploie un langage souvent ésotérique, n'explique pas le but poursuivi et les résultats ne sont pas probants ». On voit combien il est difficile de classer des auteurs – tels Newton, alchimiste, croyant, mathématicien – d'une époque où la liberté de recherche et de publication n'existait nullement[56].

Cet arrière–fond ésotérique doit être évoqué pour comprendre les premiers développements du calcul infinitésimal d'autant plus que techniquement les résultats obtenus par Newton et Leibniz semblaient provenir d'une méthode peu rigoureuse. Une distinction, ici, doit être introduite entre Newton et Leibniz : le premier est parvenu au calcul infinitésimal en faisant davantage appel à l'intuition géométrique, le second en recourant plus directement aux infiniment petits et aux infiniment grands. Dans les deux cas, la prise en compte de quantités infinies (grand ou petit) s'accompagnait de dérogations aux règles habituelles de l'algèbre. Comme la rigueur faisait défaut dans la manipulation des infiniment petits, opérations

---

[53] *Ibidem*, p. 105.
[54] *Ibidem*, pp. 226-755.
[55] R. Guenon, p. 12.
[56] H. Lincoln.cne dans C. Wilson, p. 163. H. Ruegg et E. Grouannini, dans le *Journal de Genève* du 22/9.84 font une recension de la biographie de Newton due au professeur Betty Dobbs que nous résumons ici. Pour la petite histoire des grands savants, c'est l'économiste Keynes qui acheta aux enchères en 1936 les manuscrits de Newton pour les offrir à l'Université de Cambridge !

qui fournissaient pourtant des résultats exacts, ceux–ci apparaissaient « miraculeux »[57].

Si les avantages techniques de la notation différentielle permirent dans un premier temps un progrès rapide du calcul différentiel surtout dans l'Europe Continentale, par la suite, le souci d'éliminer les incohérences logiques conduisit à la recherche d'autres fondements. Comme l'a relevé Abraham Robinson, l'histoire du calcul différentiel – comme celle d'autres sujets – étant écrite à la lumière des développements ultérieurs, c'est avec une grande indulgence que sont suivies les tentatives pour fonder sur les limites de calcul différentiel, tandis que les idées de Leibniz sont jugées avec beaucoup de sévérité[58]. Aussi ne s'étonnera-t-on point de voir depuis 50 ans l'histoire du calcul différentiel s'incliner au passage devant les pères fondateurs, puis saluer les progrès de la rigueur conduisant aux grands traités d'analyse de la fin du XIXe siècle dans lesquels les infiniment petits ne sont plus utilisés que par « commodité de langage ». Il n'est pas étonnant également que Lagrange bénéficie, pour sa tentative de reformuler le calcul différentiel, de la même indulgence puisque il entendait précisément faire abstraction de toute considération de « quantités évanouissantes, d'infiniment petits... ». Faut-il en conclure que le dernier mot de l'histoire a été écrit, la « rigueur » étant maintenant achevée, des premières tentatives à l'utilisation correcte des limites ? Afin de situer sa propre théorie – l'analyse non-standard – qui en constitue une remise en cause, Abraham Robinson résume « loyalement » cette histoire de la façon suivante :

> « Les avantages techniques de la notation différentielle favorisent initialement de rapides progrès du calcul différentiel et de ses applications en Europe continentale, où elle avait été adoptée ».
>
> Cependant, au bout d'un certain temps, les contradictions internes de cette théorie amenèrent les mathématiciens a la conviction que d'autres fondements étaient nécessaires. Lagrange crut qu'il avait découvert une approche adaptée en partant du développement en série de Taylor d'une fonction. Mais la bonne solution fut apportée par Cauchy qui fournit le premier développement rigoureux de l'analyse mathématique. Cauchy basa sa théorie sur le concept de limite, auquel, après Newton, d'Alembert avait déjà fait appel. Par la suite. Weierstrass formalisa la méthode de Cauchy, qui avait été dans une certaine mesure précédé par Bolzano.
>
> A mesure que la théorie des limites gagnait de solides positions, le discrédit tombait sur l'usage en analyse des quantités infiniment

[57] Cf. infra, pp. 119, 137, 186.

[58] Abraham Robinson, p. 260 ; J. Desanti (1975) écrit: « Pour parler grossièrement, ce fut le triomphe posthume de Newton sur Leibniz » p. 245.

> petites et infiniment grandes qui ne subsistèrent plus que par commodité de langage – pour indiquer qu'une variable tend vers l'infini ».

A cette présentation, on ajoute habituellement un complément: en effet, la rigueur, injectée dans l'analyse désigne simplement la recherche « d'une suite d'enchaînements démonstratifs, obtenus par extension et complétion à partir du seul concept de nombre entier et organisés en un système déductif cohérent »[59].

L'achèvement impliquait donc une définition rigoureuse des nombres et l'on rejoint ici les travaux sur la continuité et les ensembles de Dedekind et Cantor, base des mathématiques modernes. On peut illustrer le moment clé de la création de l'analyse moderne par Cantor et Dedekind par le passage autobiographique suivant de Dedekind :

> « En 1858, commençant (mon) enseignement, (je sentis) plus clairement que jamais auparavant, l'absence de fondements réellement scientifique pour l'arithmétique. En travaillant sur la notion de l'approche d'une grandeur variable vers une valeur limite fixe et, en particulier, en démontrant le théorème selon lequel toute grandeur qui croit continuellement, mais pas au–delà de toutes limites, doit nécessairement approcher d'une valeur limite, je dus recourir à des intuitions (évidences) géométriques. Aujourd'hui encore, je considère que le recours à l'intuition géométrique est extrêmement utile d'un point de vue pédagogique ; si l'on ne veut pas perdre trop de temps, il est même indispensable. Mais personne ne contestera que ce type d'introduction au calcul différentiel n'a rien de scientifique. Pour ma part, je pris la ferme résolution, tellement je me sentais insatisfait, de poursuivre mes recherches sur cette question aussi longtemps que je n'aurais pas trouvé un fondement parfaitement rigoureux et purement arithmétique des principes de l'analyse infinitésimale. On trouve si fréquemment l'affirmation selon laquelle le calcul différentiel traite de grandeurs continues et cependant on ne trouve nulle part une explication de cette continuité ; les exposés les plus rigoureux du calcul différentiel, eux–mêmes, ne basent pas leurs preuves sur la continuité, mais, plus ou moins consciemment, soit elles font appel à des notions géométriques ou suggérées par la géométrie, soit elles dépendent de théorèmes qui ne sont jamais démontrés de façon purement arithmétique. Parmi ceux–ci, par exemple, figure le théorème cité plus haut et une étude plus soigneuse me persuada que ce théorème ou n'importe quel autre équivalent pouvait d'une certaine

[59] La première citation est extraire de Robinson, pp. 260-1. La seconde de J.T. Desanti. p. 279. Le passage autobiographique de Dedekind ci-dessous est dans CE. Edwards, p. 330.

façon être considéré comme une base suffisante pour l'analyse infinitésimale ».

Différents éléments conduisent à penser qu'il eut peut–être prématuré d'achever de la sorte l'histoire du calcul différentiel : *tout d'abord* l'élimination des grandeurs infinitésimales de la théorie mathématique n empêche que « les physiciens, ignorant d'Alembert et surtout Weierstrass et Dedekind, continuent à pratiquer le calcul des infiniment petits en se moquant de cette rigueur mathématique, à leurs yeux purement idéologique »[60].

C'est que ce calcul, malgré son absence de rigueur, a, en sa faveur, des résultats, sa rapidité et sa simplicité. Ensuite, une théorie mathématique formulée en 1960 par A. Robinson permet de justifier l'utilisation – qui ne se limite pas à la commodité du langage – des infiniment petits. Il s'agit de l'analyse non-standard. *Enfin,* les mathématiciens sont aujourd'hui moins sûrs de l'utilisation de l'infini de Cantor et de ses disciples. En effet, dans le dernier tiers du XIXe siècle, comme l'a noté J.T. Desanti[61] « chassée par une porte (par l'élimination de l'infiniment petit et de l'infiniment grand) la considération de l'infini actuel se présentait à une autre sous la forme d'une question: quel sens attribuer à la notion d'une totalité infinie donnée ? Pourrait-elle (...) désigner un jour un être mathématique bien constitué ». La création cantorienne répondait, enfin, à la première de ces questions et grâce à l'hypothèse du continu que Cantor espérait démontrer, une réponse affirmative à la seconde question devenait possible. Hilbert devait parler du « paradis » créé par Cantor comme de « là plus admirable bénédiction de la pensée mathématique et en même temps une des plus belles réussites de l'activité intellectuelle de l'homme »[62].

Hélas, Paul Cohen a démontré en 1963 que les ressources des mathématiques habituelles étaient insuffisantes à résoudre le problème du continuum et la création cantorienne soulève aujourd'hui bien des interrogations « au point que des mathématiciens éminents ont pu parier d'un « embrouillamini pathologique » que les générations futures observeraient avec étonnement » selon le mot d'A. Fraenkel[63].

---

[60] J. Harthong. p. 1194.
[61] J.T. Desanti. p. 280.
[62] A. Fraenkel. pp. 44-6.
[63] *Ibidem*.

B – La «métaphysique» du calcul infinitésimal

L'histoire de l'infini mathématique esquissée ci–dessus est suffisante pour montrer que le rapprochement entre mathématique et théologie (ou philosophie) n'est pas accidentel. Il ne fait qu'exprimer une interrogation des philosophes depuis l'âge « classique » du calcul infinitésimal : « Quelle est la nature de l'infini dont usent les mathématiciens ? » qui fait pendant au désir des mathématiciens de « saisir »dans leur langage cet infini, apanage des philosophes et des théologiens. La défiance mutuelle n'exclut pas d'ailleurs un mimétisme (ou une concurrence à l'égard du vocabulaire). C'est ainsi que l'ensemble des règles et des principes de calcul différentiel fut rapidement désigné comme la « métaphysique » ou les «principes métaphysiques du calcul infinitésimal» Dans la seconde édition de la *Logik,* Hegel constatait: « Qui s'intéresse encore à des recherches sur l'immatérialité de l'âme, sur les causes mécaniques et finales? Les anciennes preuves de l'existence de Dieu ne sont plus citées que pour leur intérêt historique ou en vue d'édification ou d'élévation de l'âme. Il est incontestable que tout intérêt soit pour le contenu, soit pour la forme de l'ancienne métaphysique, soit pour les deux à la fois, a disparu ». C'est en ce sens – fossilisé – que le langage a conservé l'expression « métaphysique» et ce glissement n'est pas sans entraîner force contresens : c'est Lénine, dans ses *Cahiers Philosophiques* qui relevant la référence hégélienne au livre de Carnot accompagne la mention du titre *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* de points d'exclamation sarcastiques alors que cet ouvrage n'a rien de métaphysique et pourrait s'intituler *Réflexions sur les principes du calcul infinitésimal.*

Mais, puisque d'Alembert occupe – et pas seulement chronologiquement – une place centrale entre « l'âge classique » du calcul infinitésimal et la formulation moderne, entre la métaphysique du XVIIe siècle et la fin de la métaphysique qu'annonce Hegel, – place que Marx a soulignée – il est intéressant de voir comment il formule le rapport de la philosophie et des mathématiques. Nous trouvons les remarques suivantes sur le « calcul de l'infini » :

> Un des principaux points de l'application de l'algèbre à la géométrie, est ce qu'on appelle aujourd'hui, quoiqu'assez improprement, le calcul de l'infini, et qui facilite d'une manière si surprenante des solutions que l'analyse ordinaire tenterait en vain. *(Voyez* éclaircissement, § XIV, p. 288). Le philosophe doit moins s'appliquer aux détails de ce calcul, qu'à bien développer les principes qui en sont la base. Ce nom est d'autant plus nécessaire, que la plupart de ceux qui ont expliqué les règles du calcul de l'infini, ou en ont négligé les vrais principes, ou les ont présentés d'une manière très fausse. Après avoir abusé en métaphysique de la méthode des

géomètres, il ne restait plus qu'à abuser de la métaphysique en géométrie, et c'est ce qu'on a fait. Non seulement quelques auteurs ont cru pouvoir introduire dans la géométrie transcendante une logique ténébreuse, qu'ils ont nommée sublime ; ils ont même prétendu la faire servir à démontrer des vérités dont on était déjà certain par d'autres principes. C'était le moyen de rendre ces vérités douteuses, si elles avaient pu le devenir. On a regardé comme réellement existant dans la nature les infinis et les infiniment petits de différents ordres; il était néanmoins facile de réduire cette manière de s'exprimer à des notions communes, simples et précises. Si les principes du calcul de l'infini ne pouvaient être soumis à de pareilles notions, comment les conséquences déduites de ces principes par le calcul, pourraient-elles être certaines ? Cette philosophie obscure et contentieuse, qu'on a cherché à introduire dans le siège même de l'évidence, est le fruit de la vanité des auteurs et des lecteurs. Les premiers sont flattés de pouvoir répandre un air de mystère et de sublimité sur leurs productions ; les autres ne haïssent pas l'obscurité, pourvu qu'il en résulte une apparence de merveilleux; mais le caractère de la vérité est d'être simple.

Au reste, en supposant même que les principes métaphysiques dont on peut faire usage en géométrie, soient revêtus de toute la certitude et la clarté possible, il n'y a guère de propositions géométriques qu'on puisse démontrer rigoureusement avec le seul secours de ces principes. Presque toutes demandent, si on peut parler de la sorte, la toise ou le calcul, et quelquefois l'un et l'autre. Cette manière de démontrer paraîtra peut–être bien matérielle à certains esprits; mais c'est presque toujours la seule qui soit sûre pour arriver à des combinaisons et à des résultats exacts. *(Voyez* éclaircissement, § *Ibidem,* XV, p. 294). Il semble que les grands géomètres devraient être excellents métaphysiciens, au moins sur les objets dont ils s'occupent; cependant il s'en faut bien qu'ils le soient toujours. La logique de quelques uns d'entre eux est renfermée dans leurs formules, et ne s'étend point au–delà. On peut les comparer à un homme qui aurait le sens de la vue contraire à celui du toucher, ou dans lequel le second de ces sens ne se perfectionnerait qu'aux dépens de l'autre. Ces mauvais métaphysiciens, dans une science où il est si facile de ne le pas être, le seront à plus forte raison infailliblement, comme l'expérience le prouve, sur les matières où ils n'auront point le calcul pour guide. Ainsi la géométrie qui mesure les corps, peut servir en certains cas à mesurer les esprits même[64].

[64] D'Alembert (1821), tome I, pp. 275-6.

Plus loin, D'Alembert s'interroge pour « savoir quel genre d'esprit doit obtenir par sa supériorité le premier rang dans l'esprit des hommes, celui qui excelle dans les lettres ou celui qui se distingue au même degré dans les sciences », ce qui montre que le terme de concurrence n'était pas inapproprié pour décrire les relations entre « géomètres » et « métaphysiciens » du calcul infinitésimal qu'il « éclaircit » de la façon suivante :

> Pour se former des notions exactes de ce que les géomètres appellent *calcul* infinitésimal, il faut d'abord fixer d'une manière bien nette l'idée que nous avons de l'infini. Pour peu qu'on y réfléchisse, on verra clairement que cette idée n'est qu'une notion abstraite. Nous concevons une étendue finie quelconque, nous faisons ensuite abstraction des bornes de cette étendue, et nous avons l'idée de l'étendue infime. C'est de la même manière, et même de cette manière seule, que nous pouvons concevoir un nombre infini, une durée infinie, et ainsi du reste.
>
> Par cette définition ou plutôt cette analyse, on voit d'abord à quel point la notion de *l'infini* est pour ainsi dire vague et imparfaite en nous; on voit quelle n'est proprement que la notion *d'indéfini*, pourvu qu'on entende par ce mot une quantité vague à laquelle on n'assigne point de bornes, et non pas, comme on le peut supposer dans un autre sens, une quantité à laquelle on conçoit des bornes sans pourtant les fixer d'une manière précise.
>
> On voit encore par cette notion que *l'infini,* tel que l'analyse le considère, est proprement la *limite* du fini, c'est–à–dire le terme auquel le fini tend toujours sans jamais y arriver, mais dont on peut supposer qu'il approche toujours de plus en plus, quoiqu'il n'y atteigne jamais. Or c'est sous ce point de vue que la géométrie et l'analyse bien entendues considèrent la quantité infime; un exemple servira à nous faire entendre.
>
> Supposons cette suite de nombres fractionnaires à l'infini. *½, ¼, 1/8, 1/16*, etc., et ainsi de suite, en diminuant toujours de la moitié : les mathématiciens disent et prouvent que la somme de cette suite de nombres, si on la suppose poussée à l'infini, est égale à 1.
>
> Cela signifie, si on veut ne parler que d'après des idées claires, que le nombre 1 est la *limite* de la somme de cette suite de nombres; c'est–à–dire, que plus on prendra de nombres dans cette suite, plus la somme de ces nombres approchera d'être égale à 1, et *qu'elle pourra en approcher aussi près qu'on voudra.* Cette dernière condition est nécessaire pour compléter l'idée attachée au mot *limite.* Car le nombre 2, par exemple, n'est pas la limite de la somme de cette suite, parce que, quelque nombre de termes qu'on y prenne, la somme à la

vérité approchera toujours de plus en plus du nombre 2, mais ne pourra en approcher aussi près qu'on voudra, puisque la différence sera toujours plus grande que l'unité.

De même quand on dit que la somme de cette suite 2. 4, 8, 16, etc. ou de toute autre qui va en croissant, est infinie, on veut dire que plus on prendra de termes de cette suite, plus la somme en sera grande, et qu'elle peut être égale à un nombre aussi grand qu'on voudra.

Telle est la notion qu'il faut se former de *l'infini*, au moins par rapport au point de vue sous lequel les mathématiques le considèrent ; idée nette, simple, et à l'abri de toute chicane.

Je n'examine point ici s'il y a en effet des quantités infinies actuellement existantes; si l'espace est réellement infini; si la durée est infime; s'il y a dans une portion finie de matière un nombre réellement infini de particules. Toutes ces questions sont étrangères à l'infini des mathématiciens, qui n'est absolument, comme je viens de le dire, que la *limite* des quantités finies ; limite dont il n'est pas nécessaire en mathématiques de supposer l'existence réelle; il suffit seulement que le fini n'y atteigne jamais.

La géométrie, sans nier l'existence de l'infini actuel, ne suppose donc point, au moins nécessairement, l'infini comme réellement existant ; et cette seule considération suffit pour résoudre un grand nombre d'objections qui ont été proposées sur l'infini mathématique.

On demande, par exemple, s'il n'y a pas des infinis plus grands les uns que les autres, si le carré d'un nombre infini n'est pas infiniment plus grand que ce nombre ? La réponse est facile au géomètre : un nombre infini n'existe pas pour lui, au moins nécessairement; l'idée de nombre infini n'est pour lui qu'une idée abstraite, qui exprime seulement une limite intellectuelle à laquelle tout nombre fini n'atteint jamais[65].

Ces extraits manifestent le divorce entre l'(ancienne) métaphysique telle que Hegel la présentait et la métaphysique qui préside au calcul infinitésimal selon D'Alembert. D'ailleurs, D'Alembert lui–même souligne cet écart :

§ XV. Éclaircissement *sur l'usage et sur l'abus de la métaphysique en géométrie, et en général dans les sciences mathématiques,* page 276.

La métaphysique, selon le point de vue sous lequel on l'envisage, est la plus futile des connaissances humaines; la plus satisfaisante

[65] *Ibidem*, pp. 288-9.

> quand elle ne considère que des objets qui sont à sa portée, qu'elle les analyse avec netteté et avec précision, et qu'elle ne s'élève point dans cette analyse au–delà de ce qu'elle connaît clairement de ces mêmes objets; la plus futile, lorsque, orgueilleuse et ténébreuse tout à la fois, elle s'enfonce dans une région refusée à ses égards, qu'elle disserte sur les attributs de Dieu, sur la nature de l'âme, sur la liberté, et sur d'autres sujets de cette espèce, où toute l'antiquité philosophique s'est perdue, et où la philosophie moderne ne doit pas espérer être plus heureuse[66]

et il précise encore sa conception en attaquant vivement la position de Fontenelle: « (...) M. de Fontenelle a distingué différents ordres d'infinis et d'infiniment petits qui n'existent pas plus les uns que les autres; qu'il a distingué de même deux espèces d'infinis, l'infini métaphysique et l'infini géométrique, [souligné par D'Alembert], aussi chimériques l'un que l'autre, quand on voudra leur attribuer une existence réelle »[67].

C'était pour préserver le domaine de la métaphysique que la philosophie scolastique et Descartes rejetaient l'infini actuel, c'est pour rejeter les interrogations métaphysiques hors des mathématiques que D'Alembert s'en prend à l'infini actuel. Paradoxe qui rappelle un précédent: l'attachement à la définition traditionnelle de Dieu entraînait Kepler à défendre l'idée d'un monde fini, tandis que G. Bruno pour ne pas limiter la création de Dieu soutenait l'idée d'une infinité de mondes.

Si nous voulons « nous former des notions exactes » sur cette question, il nous faut remonter à Leibniz. Les sarcasmes de Voltaire à l'égard de Leibniz lui ont fait une épouvantable réputation de « métaphysicien » au sens vulgaire et péjoratif du terme. Or, si la multiplicité des discours tenus par Leibniz ne facilite pas l'approche de sa pensée, il nous apparaît que les censeurs sont plus prompts à prononcer leur jugement qu'à apporter les preuves. Certes, il y a des « sauts » ou des « trous » dans le calcul de Leibniz dont certains sont comblés par ces arguments obscurs (principe de continuité, principe de raison suffisante), pourtant c'est un raccourci un peu rapide que veut nous faire emprunter J.T. Desanti quand il avance que Leibniz chercherait « la justification de l'infinitésimal dans la métaphysique, dans la monadologie, théorie générale de l'être »[68].

Nous sommes plus convaincus par la lecture soigneuse d'A. Robinson (que cite, d'ailleurs J.T. Desanti) qui fait apparaître la complexité de la position de Leibniz. Nous en retenons que Leibniz ne se laisse pas réduire

---

[66] *Ibidem*, p. 294
[67] *Ibidem*, p. 299.
[68] J.T. Desanti, pp. 275-6.

par les alternatives que soulèvera D'Alembert. Ainsi, de l'existence des infinitésimales : Leibniz, s'il acceptait l'idée d'un infini potentiel, avait une position beaucoup plus réservée sur l'existence de l'infini actuel, cherchant a convaincre de l'efficacité du calcul infinitésimal ceux qui le rejettent :

> « ... D'où s'ensuit, que si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblable à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$ ... C'est encore de la même façon qu'on conçoit des dimensions au–delà de trois..., le tout pour établir des idées propres à abréger les raisonnements et fondées en réalités.
>
> Cependant il ne faut point s'imaginer que la science de l'infini est dégradée par cette explication et réduite à des fictions ; car il reste toujours un infini syncatégorématique, comme parle l'école et il demeure vrai par exemple que 2 est autant que 1/1 + 1/2 +1/4 +1/8+1/16+1/32 etc., ce qui est une série infime dans laquelle toutes les fractions dont les numérateurs sont 1 et les dénominateurs de progression géométrique double, sont comprises à la fois, quoiqu'on n'y emploie toujours que des nombres ordinaires et quoiqu'on n'y fasse point entrer aucune mention infiniment petite, ou dont le dénominateur soit un nombre infini... »[69].

Contenant l'ardeur de ses disciples tels Fontenelle, objet des attaques de d'Alembert :

> « Entre nous je croîs que M. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il voulait faire des éléments métaphysiques de notre calcul. Pour dire le vrai, je ne suis pas trop persuadé moi–même qu'il faut considérer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses idéales et comme des fictions bien fondées. Je crois qu'il n'y a point de créature au–dessous de laquelle naît une infinité de créatures, cependant je ne crois point qu'il y en ait, ni même qu'il en puisse avoir d'infiniment petites et c'est ce que je crois pouvoir démontrer»[70].

A. Robinson cite, enfin, une lettre écrite par Leibniz à la fin de sa vie qui fait référence aux attaques subies par les Leibniziens et il y voit une raison possible de l'ambiguïté certaine des affirmations précédentes. Elle nous montre, en tous les cas, les dangers qu'il y aurait à « classer » trop rapidement un tel auteur :

---

[69] La citation est de Leibniz 1701, p. 350; reprise dans A: Robinson, p. 262.
[70] *Ibidem*, la citation est de Leibniz 1702, p. 91-5.

«II. Pour ce qui est de calcul des infinitésimales, je ne suis pas tout à fait content des expressions de Monsieur Herman dans sa réponse à Monsieur Nieuwentijt, ni de nos autres amis. Et M. Naudé a raison d'y faire des oppositions. Quand ils se disputèrent en France avec l'Abbé Gallois, le Père Gouge et d'autres, je leur témoignai, que je ne croyais point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement... Mais comme M. le Marquis de l'Hospital croyait que par là je trahissais la cause, ils me prièrent de n'en rien dire, outre ce que j'en avais dit dans un endroit des actes de Leibniz, et il me fut aisé de déférer à leur prière »[71].

On voit ici affleurer la problème de la conception même des mathématiques telle qu'elle est discutée au XXe siècle entre platoniciens, formalistes et intuitionnistes, les hésitations de Leibniz n'étant probablement pas dictées par les seules contraintes tactiques d'une querelle finalement fortuite et Marx semble bien lui attribuer une conception formaliste quand il lui reproche dans son histoire du cheminement conceptuel : « 1) calcul différentiel mystique. (...) dx est supposé exister grâce à une *explication* métaphysique. D'abord, il existe, et ensuite il est expliqué »[72]. Nous examinerons ces points plus en détail en essayant de dégager la conception marxienne des mathématiques. Mais il convient ici de marquer encore les équivoques qui entourent l'usage du terme « métaphysique » quand Marx critique le point de départ « métaphysique » de Leibniz (et Newton) comme ci–dessus ou bien dans la *Deuxième Esquisse:* « Et ici dans la première (historiquement) méthode, comment a donc été obtenu le point de départ des symboles différentiels en tant que formule d'équation ? Grâce à des hypothèses métaphysiques soit implicites soit explicites, qui conduisent elles–mêmes à des conclusions une fois de plus métaphysiques, non mathématiques »[73], ou encore des raisonnements insuffisamment rigoureux à son gré[74] Marx, ici, reprend l'abomination de la métaphysique que l'on avait pu noter chez D'Alembert – tout au moins en ce qui concerne les interférences éventuelles avec les mathématiques. Malheureusement, la condamnation est si totale qu'elle a fini par devenir imprécise.

Ces accusations, en ce qui concerne Leibniz, étaient, sans doute, aussi injustes. En effet, il n'était pas loin de prôner la rationalité avec autant de conviction que D'Alembert et Marx même s'il la situait dans un contexte différent et plus précisément évoquant un conflit éventuel de la raison et de la foi, il écrit : « Comme la raison est un don de Dieu, aussi bien que la foi,

[71] *Ibidem*, p. 263. 1, la citation est de Leibniz 1716, pp. 499-502
[72] *Cf. infra* p. 193.
[73] *Ibidem*, p. 167
[74] *Ibidem*, p. 224.

leur combat ferait combattre Dieu contre Dieu et si les objections de la raison contre quelque article de la foi sont insolubles, il faudra dire que ce prétendu article sera faux et non révélé : ce sera une chimère de l'esprit humain »[75].

C'est, peut–être, cette complexité leibnizienne qui l'a protégé des attaques marxiennes – essentiellement consacrées à Newton; nous ignorons, par contre, les raisons de « l'admiration » que lui témoignait Marx et qui nous paraît difficile à interpréter et que nous ne cherchons pas à élucider plus avant. Il est, par contre, indispensable pour situer l'intérêt de Marx pour le calcul différentiel de rappeler les travaux de Hegel et de tenter une confrontation avec les *MMM*[76].

C – L'origine hégélienne des recherches de Marx

Il ne s'agit plus seulement, ici, de situer ou d'éclairer les *MMM* mais de retracer directement leur origine : en effet, si une analyse forcément rapide mais scrupuleuse nous a conduit à écarter parmi les motivations de Marx un souci d'utilisation immédiate en économie, plusieurs éléments marquant une relation Hegel–Marx sautent aux yeux quand on examine les conditions dans lesquelles Marx s'est intéressé au calcul différentiel et plus encore, le contenu de ses travaux. Nous nous contenterons de citer quelques éléments significatifs du contexte de ces travaux :

1) Chronologiquement, tout d'abord, nous avons vu que Marx signalait, le 11 janvier 1858 pour la première fois à Engels qu'il travaillait l'algèbre et que durant la même période, il relisait La Logique de Hegel. Ce n'est d'ailleurs que cinq ans plus tard que Marx abordera le calcul différentiel et l'on peut penser que la remarque de Engels est un écho des difficultés que Marx et lui–même ont éprouvé à lire La Logique. Nous ignorons quels étaient les manuscrits mathématiques laissés par Hegel auxquels fait allusion Engels mais il est vraisemblable que Hegel avait des cahiers de lectures mathématiques et des brouillons, les premiers étant attestés par ses références bibliographiques, les seconds paraissant techniquement inévitables.

2) Les orientations bibliographiques de **Marx** ont été manifestement influencées par Hegel. En effet, on y trouve, en schématisant ;

a) Des ouvrages universitaires courants, le Boucharlat, le Hind étaient les manuels de base des études supérieures en Grande Bretagne. Il est bon de signaler à cet égard l'isolationnisme anglais en ce domaine et ce n'est pas

---

[75] Citation de la Théodicee, II, § 294, tirée de Cassirer 1902. p. 474.
[76] J. Elster a consacre un article à *Marx et Leibniz* peu convaincant a noire sens et nous n'excluons pas que « l'admiration » de Marx doive être comprise « cum grano salis ».

sans bonne raison que le grand mathématicien anglais G.M. Hardy a pu écrire clans la préface de 1937 à son Cours de Mathématiques Pures – rédigé en 1917 – « Ce livre a été écrit alors que l'analyse était négligée à Cambridge et avec une emphase et un enthousiasme qui semblent plutôt ridicules à présent. Si j'avais à le réécrire maintenant, je ne le ferais pas (pour parler comme le fait humoristiquement le professeur Littlewood) dans le style « d'un missionnaire parlant à des cannibales »[77].

b) Des ouvrages qui ont plus ou moins fait date dans l'histoire du calcul différentiel. Naturellement, les ouvrages les plus célèbres ne peuvent guère nous fournir d'indications sur des sources d'inspirations puisqu'il devait figurer dans toutes les bibliographies mais il est remarquable que Marx se soit efforcé – apparemment en vain d'ailleurs – de se procurer les ouvrages de John Landen et Simon Lhuillier, auteurs moins célèbres mais mentionnés par Hegel.

3) Plus déterminantes encore sont les remarques nombreuses que l'on trouve surtout chez Engels dans *L'Anti-Dühring* dans la *Dialectique de la Nature,* mais aussi dans des lettres à Marx ; ainsi, pour s'en tenir a un seul exemple: le 10 août 1881, Engels vient de se mettre « enfin » à la lecture des manuscrits mathématiques de Marx et il répond à Marx après quelques commentaires sur « la méthode originale » de celui–ci : « Ainsi ce vieil Hegel devinait tout à fait correctement quand il disait que la condition fondamentale de la différentiation était que les variables soient nécessairement élevées à des puissances différentes et que l'une au moins d'entre elles à la puissance 2 ou *1/2*. Nous savons maintenant ainsi pourquoi ». Ce passage doit s'interpréter en tenant compte de la collaboration entre Marx et Engels. Le passage visé est bien dans la *Science de La Logique.* Comme il s'agit d'une remarque en passant de Hegel, la lettre de Engels démontre dans quelle familiarité avec les travaux mathématiques de Hegel Marx et lui se trouvaient à la date considérée. D'ailleurs Marx ne s'est en rien soucié des mathématiques postérieures à 1813 ; en particulier, les ouvrages postérieurs à Hegel qu'il utilise ne sont que des vulgarisations de Lagrange ou d'Euler et si l'on trouve dans une page bibliographique mention d'un ouvrage de Moigno qui présentait les idées de Cauchy sur les limites – fondement du calcul différentiel moderne –, Marx ne l'a vraisemblablement jamais étudié et, en tous les cas, on n'y trouve aucune autre référence dans les *MMM.* En un sens, ceux–ci sont donc le développement mathématique indispensable à la lecture de Hegel, en somme le programme d'édition critique de Hegel auquel Engels faisait allusion en 1864. Cette affirmation – volontairement provocante – veut souligner l'intérêt de ces *Manuscrits Mathématiques* qui apporte une nouvelle dimension au débat sur la fameuse « coupure » dans l'œuvre de

[77] *Cf.* introduction à l'édition russe de *MMM* (reprise dans l'édition anglaise).

Marx et sur ses relations avec Hegel. Mais, arrivé à ce point et avant d'aller plus avant dans la relation Hegel/Marx, il est nécessaire de signaler les avatars de l'appareil critique des *MMM* suivant les différentes éditions et la place, variable mais toujours restreinte qu'il réserve à Hegel.

Au début des années 30, lors des premières publications de certaines parties des *MMM*, Ernest Kolman et Sonia Janovskaja consacrèrent un article important à *Hegel et les Mathématiques* dans lequel ils admettent l'origine hégélienne des travaux mathématiques de Marx même si l'accent est plutôt mis sur une critique des déviations « idéalistes » de Hegel. En 1968, par contre, lors de la publication quasi définitive sans doute des *MMM* toute référence à Hegel a disparu ! Il en va de même de l'édition allemande de 1972 et il faut attendre l'édition anglaise – parue alors que la préparation de cette édition s'achevait – pour retrouver l'article *Hegel et les Mathématiques* des années 1930 ainsi qu'un commentaire beaucoup moins partial sous le titre *Hegel, Marx and the Calculus*. Cet « oubli » de 1968 est à rapprocher de l'omission, également, des chapitres de mathématiques économiques. Il y a la même volonté de présenter « LE »matérialisme dialectique comme un système achevé exempt de contradiction interne et dont la perfection ne saurait supporter des hérédités douteuses. Pourtant, on ne peut pas accuser Marx d'avoir dissimulé la source de son inspiration. Il ne faut pas oublier, en effet, que la partie la plus achevée de ces manuscrits, celle qui contient les développements les plus personnels de Marx était destinée – dans l'état où nous la trouvons – à Engels qui connaissait lui–même suffisamment la *Logique* de Hegel pour que des références détaillées aient été superflues. Le vocabulaire, lui–même, de Marx porte, en outre, la marque de Hegel sans que l'on puisse décider s'il s'agit, ici, d'autre chose que d'une coquetterie comme dans la *Contribution a la Critique de l'Économie Politique*[78]. Ainsi l'examen des *MMM* conduit nécessairement à étudier le traitement hégélien des mathématiques.

[78] Ainsi la dualité : réalité/effectivité (« Realität Wirklichkeit ») ou bien la valeur de la fonction désignée par « die Zahl » (litt. : le chiffre) et non « die Wert », particularité qu'André Doz a relevé également chez Hegel, *cf*. Doz, 1972.

CHAPITRE IV

LA DIALECTIQUE HEGELIENNE

ET LES MATHÉMATIQUES

L'analyse hégélienne du calcul infinitésimal est contenue dans la Science de la Logique. L'abord de ce texte présente des difficultés de plusieurs ordres qui tiennent, ici, moins à l'absence de repères qu'à leur surabondance, il est vrai, inadaptées pour la plus grande partie à notre objet. Notons, tout d'abord, que la *Science de la Logique* a connu deux éditions assez substantiellement remaniées, la première parue en 1812-1816, la seconde parue en 1832-1845. La préface de celle-ci était datée de novembre 1831, peu de temps donc avant la mort de Hegel; il y rappelle que les livres de Platon ont été remaniés sept fois et regrette, pour sa part, de n'avoir pas le loisir pour les «soixante-dix-sept remaniements» qui conviendraient. Outre des remaniements divers, la seconde édition se distingue précisément de la première par les additions — considérables — apportées aux développements consacrés au calcul différentiel. Ces additions sont les parties les plus «techniques» de l'ouvrage (utilisation de symboles, études précises de fonctions mathématiques, etc.…). Dans la seconde édition, elles apparaissent comme des notes. J. T. Desanti, qui a consacré un essai souvent cité à ces développements, écrit: «Il n est pas indifférent de souligner que l'épistémologie hégélienne du calcul infinitésimal est exposée dans des notes: c'est-à-dire dans un commentaire qui selon «l'ordre des raisons», est produit après l'engendrement des déterminations conceptuelles propres au quantum»[79]. Cet «ordre des raisons» semble recevoir une confirmation de l'ordre chronologique, mais nous pensons qu'il s'agit plutôt une affirmation plus hardie dans le domaine mathématique ou sur le domaine mathématique.

---

[79] J.T. Desanti, p. 24.

Nous pensons, même, que Hegel devait disposer de manuscrits de calcul plus importants encore sur le calcul infinitésimal (peut-être ceux-là même que visait Engels) et les raisons pour lesquelles seule une partie a été publiée en deux temps restent inconnues. Il faut indiquer, enfin, parmi les difficultés de cet ouvrage, une particularité soulignée par Hegel au début de son livre qui tient à la nature de la logique et empêche d'en fournir une «présentation»: «on ne peut pas dire à l'avance ce qu'elle est, mais c'est seulement après l'avoir traitée à fond qu'on peut en prendre connaissance»[80] II faut, donc, prendre le tram philosophique en marche. Aussi ne faut-il pas s'étonner de la multiplicité des lectures qui en sont faites (et en français, la multiplicité des traductions allant de la conformité à la syntaxe et au vocabulaire français à un respect absolu du texte hégélien) d'autant que la virtuosité dialectique de l'auteur laisse plus d'une fois le lecteur pantois. Engels, dont la familiarité avec les textes de Hegel est certaine, ne pouvait s'empêcher de marquer son étonnement. Citons une de ses notes: «Hegel se tire très facilement d'affaire sur cette question de la divisibilité en disant que la matière est l'une et l'autre, divisible et continue, et en même temps, ni l'une ni l'autre»[81]. Dans ces conditions, il serait prétentieux de vouloir résumer en quelques pages «ce que Hegel a vraiment dit sur le calcul différentiel», ce qui, d'ailleurs, conduirait en une chaîne sans fin à remonter l'histoire de la mathématique et de la philosophie, Hegel reprenant Kant reprenant Spinoza.

Néanmoins, nous allons tenter de relever quelques éléments permettant un parallèle entre la position hégélienne et les travaux mathématiques de Marx. Dans cette entreprise, nous utiliserons largement les appareils critiques des éditions de Hegel et les commentaires de Desanti, Fleischman, Kolman, Janovskaja et Smith.

Nos références ne sont sans doute pas exhaustives, mais il est remarquable que si ces textes présentent des points de vue — voire des lectures —; sensiblement différents, ils partagent tous une même approche méthodologique dans laquelle le développement des mathématiques — conçu comme linéaire (et/ou sédimentaire) — serait décisif pour juger Hegel.

On mesure au passage l'abaissement relatif de la philosophie quand on compare l'assurance de Hegel traitant de haut la mathématique et les systèmes de défense révérenciels de ces auteurs. Eugène Fleischmann (1968), comme nous l'avons vu, est le plus radical en la matière: «l'analyse du calcul infinitésimal aboutit à des conclusions que nous croyons - si l'on ose dire ainsi - entièrement a-mathématiques, en sorte

[80] Hegel, S.L. p. 27.
[81] Engels, 1968. p. 249. Engels ajoute: «Ceci n'est pas une réponse, mais est presque prouvé maintenant».

qu'il est d'autant plus facile de renoncer à leur formulation mathématique exacte».Dans la traduction de la 1ère édition la «note sur le concept de l'infini mathématique» est assortie du commentaire suivant: «Ce très long développement qui recevra encore des adjonctions dans la seconde édition, constitue l'un des passages les plus curieux de l'ouvrage. Hegel y tente a propos des formules mathématiques, une exégèse qui ne peut qu'irriter le spécialiste (...)». Si J. T. Desanti a souvent la main un peu lourde du maître d'école faisant la leçon (de mathématique) â Hegel, il a, plus que les autres auteurs mentionnés, le sens de ce que le discours du philosophe peut avoir de validité, y compris dans le champ mathématique ; pourtant dans une paraphrase du texte de Hegel, il introduit une correction (ou un lapsus?) très significatif: Hegel, pour rabaisser les prétentions mathématiques, écrit, au sujet de «la méthode du calcul différentiel qu'il résume dans la formule $dx^n = nx^{n-1}dx$: «on peut se familiariser avec la théorie en peu de temps, en une demi-heure peut-être»: cette demi-heure devient «quelques heures» chez Desanti![82]

Mais surtout, nous sommes beaucoup plus réservés sur la clôture «définitive» du discours mathématique sur l'infini (et partant sur le calcul différentiel): «l'étape finale du calcul infinitésimal classique, celle qui est représentée par les grands traités d'analyse de la fin du XIXe siècle» n'a sans doute pas prononcé «le» dernier mot[83]. Il convient, tout d'abord, de replacer les développements de Hegel sur le calcul différentiel dans la problématique hégélienne de l'opposition fini/infini et de son développement.

A — Le Fini et l'Infini chez Hegel

La science de la logique.

Comme nous l'avons déjà souligné, il est difficile de présenter succinctement la *Logique* de Hegel en raison de son contenu même. Hegel, en effet, y entreprend une révision critique de toute la philosophie occidentale et plus généralement de toute philosophie basée sur une scission entre un objet (de la connaissance) et un sujet (qui connaît ou cherche â connaître). Ce rejet de la scission objet/sujet a pour conséquence qu'il n'y a pas lieu de «présenter un objet ou un contenu à

---

[82] Cf. pour Fleischmann 1968. p. 103: pour les traductions de Hegel (le édition, note de la page 236 ; pour Desanti, p. 54 ; (on pourra comparer avec le texte de Hegel SL p 304 ou WL p. 322).

[83] C'est Bourbaki, p. 249, qui parle «d'étape finale», et Desanti, p. 55, qui écrit au sujet de Hegel: «Lagrange lui parait l'homme qui a prononcé le dernier mot», comme nous le verrons, cela n est pas correct en ce qui concerne Hegel.

connaître»; «l'objet de la philosophie n'est pas un objet immédiat»[84]: C'est précisément à la logique qu'il revient d'être la science de la pensée en général, c'est-à-dire d'éclairer les conditions formelles de la connaissance véritable en faisant abstraction de tout contenu de départ.

La théorie de l'être

La *Logique* est organisée autour d'une grande triade: l'être, l'essence et le concept[85]. Le plan de l'«être» est l'immédiateté, la volonté de saisir l'objet directement, sans faire intervenir la structure subjective à travers lequel il est nécessairement conçu. Le plan de l'essence, (la scission objet/sujet), conduit à reconnaître l'objet de r«extérieur», c'est-à-dire que l'objet apparaît comme un «phénomène». Ainsi ce qui apparaît au début n’est pas tenu pour essentiel, et l’«essence» sera ce qui est vu par l'esprit et qui n'apparaît pas au début. Le «concept» couronne cette triade en accrochant objet et sujet. Puisque le plan de la pensée sur un objet doit être dépassé, puisque l'objet en soi se dissout en un processus de réflexion, la réflexion prend la place de l'objet et, comme elle est, elle-même, pensée, sujet et objet s'identifient de sorte que la pensée se découvre soi-même comme son véritable objet. Dans cette progression, Hegel croît pouvoir s'appuyer sur l'histoire de la philosophie occidentale, chaque moment de la triade renvoyant à une étape historique, le plan de l'être à l'Antiquité et au Moyen Age, celui de l'essence au XVIIe (Descartes, Leibniz), le dernier, celui du concept, à Kant et à Fichte pour culminer dans la logique de Hegel précisément.

Pour être fidèle à Hegel, il nous faudrait suivre ces trois moments et parcourir, ainsi, jusqu'à son terme, «le chemin du doute et du désespoir»[86], pour accéder au «concept». Plus modestement, nous nous contenterons de repérer comment Hegel introduit ses réflexions sur le calcul infinitésimal mais cela nous obligera à présenter au moins les grandes articulations de la première partie (Livre I) de la *Science de la Logique* consacré à l'être. Ce bout de chemin lui-même n'est pas particulièrement aisé,

---

[84] Hegel. EL §1.

[85] Cette présentation de la «grande made» est librement extraite du chapitre II de Fleischmann 1968. Nous ne voudrions pas, cependant, abriter notre résumé hardi de l'autorité de cet auteur dont nous ne partageons pas le jugement sur Hegel et les mathématiques et qui ne peut donc être tenu pour responsable de notre interprétation de Hegel; c’est pourquoi nous ne marquons pas plus précisément nos emprunts, si bien volontiers nous reconnaissons leur importance et l'aide que la lecture de Fleischmann nous a apportée. Pour ce qui est du dernier terme de la triade, «compréhension» qui désigne plus spontanément un processus et contient l'idée d'arrimage (appréhender) rend mieux, a notre avis, le terme allemand de Begriff (greifen = savoir, prendre, appréhender) que le terme de concept.

[86] L'expression est de Hegel dans !a préface à la *Phénoménologie de l'Esprit*, nous ne croyons pas la reprendre a mauvais escient, ici.

heureusement nous y ferons, croyons-nous, des découvertes suffisamment importantes pour justifier notre détour.

Mais avant de s'engager dans cette voie, il nous faut nous arrêter aux quelques notations introductives que fournit Hegel sur son projet de logique. En effet, il y apparaît une similitude certaine avec l'ambition de la mathématique et plus précisément de la logique formelle. C'est ce que Hegel indique lui-même dans l'introduction de la *Science de la Logique*: «Jusqu'à présent, la philosophie n'a pas encore trouve sa méthode, elle regardait avec envie l'édifice systématique de la mathématique et lui empruntait sa méthode»[87]: C'est précisément pour éviter ce recours qu'il va construire sa logique, donc, présenter une méthode concurrente. Hegel, d'ailleurs, rejette vigoureusement le recours à la méthode des mathématiques et en particulier les «égarements» de Leibniz qui était allé, effectivement, jusqu'à confondre le penser et le calculer. Pour ce faire, Hegel renvoie tout d'abord à ce qu'il dit de la méthode mathématique dans la *Phénoménologie de l'Esprit*, et revient encore à plusieurs reprises sur ce sujet dans la *Logique*. Fondamentalement, Hegel soutient que la mathématique s'en tient au premier des trois plans qu'il a distingué: il y a une extériorité entre l'objet de la mathématique et la réflexion qui est un avatar de la scission sujet/objet. Ne parvenant pas ainsi à s'élever jusqu'au «concept», la mathématique reste «subordonnée» (ou inférieure). Sans s'engager dans cette discussion, relevons immédiatement que l'état du calcul infinitésimal avant Lagrange et en particulier la version newtonienne avec son appel à l'intuition justifiait plutôt la façon de caractériser les mathématiques propre à Hegel. Aujourd'hui les tentatives de reconstruction des mathématiques laissent la question plus ouverte -— ainsi nous trouvons assez discutable l'argument avancé par Biard et alii: «(dans les mathématiques), le penser apparaissant comme simplement formel, il ne peut que présupposer un contenu destiné à le remplir»[88].

Mais il convient à présent, de nous rapprocher plus précisément du traitement hégélien de l'infini dans la *Logique de l'Être*.

L'infinité qualitative

La *Logique de l'Être* s'organise autour de trois déterminations: la qualité, la quantité, la qualité quantitativement définie: la mesure. C'est dans le chapitre sur la quantité que se situent les notes sur le calcul infinitésimal. Mais il faut noter que Hegel insiste sur l'antériorité de la qualité par rapport à la quantité. En effet, Hegel prend, comme point de départ, l'être pur, c'est-à-dire l'être le plus simple qu'on puisse penser, une «intuition vide ou une pensée vide» et il montre comment la qualité (la déterminité) est indissociable de ce point de départ, catégorie sans laquelle celui-ci se

[87] SL p. 39 WL t. l, p. 48.
[88] Biard et alii. p. 11.

dissoudrait totalement. Au contraire, «la grandeur est une propriété qui ne fait plus un avec l'être, mais en est devenue distincte: elle est la qualité supprimée/conservée»[89].

C'est précisément parce que, dans la section consacrée à la qualité, Hegel a étudié la relation du fini et de l'infini qu'il se sentira autorisé dans la section consacrée à la quantité à parler du calcul infinitésimal. Naturellement, ce renversement du rapport qualité/quantité qu'opère Hegel par rapport à la philosophie kantienne ne signifie nullement une correspondance chronologique dans l'élaboration de sa pensée; on peut même dire que son vocabulaire pour exprimer la «qualité» est infesté de termes du calcul infinitésimal — bornes, limites, différences. Parfois d'ailleurs, le vocabulaire de Hegel anticipe sur des distinctions qui ne seront opérées que plus tardivement par les mathématiques: c'est ainsi que la distinction borne/limite introduite par Hegel n'existait pas dans les mathématiques de son époque où la notion de limite était floue[90]. Mais cette influence ne doit pas masquer la subordination dans laquelle Hegel tient le quantitatif par rapport au qualitatif et nous pensons qu'isoler les remarques sur le calcul infinitésimal du rapport fini/infini mutile gravement la démarche de Hegel[91].

Celle-ci s'inaugure, par l'être pur dont il montre qu'il est la même chose que le néant, entendant par là qu'ils sont également abstraits, dépourvus de détermination et qu'on ne peut les penser qu'à partir du devenir, dans «ce mouvement de passage de l'un dans l'autre»[92]. Ainsi, le chapitre sur l'être est surtout l'occasion pour Hegel de régler leur compte à la philosophie de ses prédécesseurs et le départ véritable est constitué par l'être déterminé ou défini, (le Dasein). Hegel présente successivement l'être déterminé, la finitude (ou le fini) et enfin l'infini. Il relève, dans sa définition de l'être déterminé le caractère double de la détermination: il y a l'aspect de la réalité et celui de la négation. Hegel reprend ici la proposition de Spinoza: «omnis determinatio est negatio» (toute détermination - affirmation positive - est, en même temps, dénégation)[93]. C'est cette dialectique de l'affirmation et de la négation qui permet à Hegel de dépasser la conception traditionnelle du fini. Celle-ci avait fini par enfermer le fini, confondu avec ce qu'il y a de stable, de fixe. Au contraire, pour Hegel, dans le fini se manifeste en permanence l'instabilité et le changement. Il est intéressant de suivre précisément le raisonnement de Hegel pour y

[89] Hegel. SL p. 70, WL, p. 80.
[90] Cf. infra, p. 287.
[91] J. T. Desanti dans son essai, ne fait aucune mention des traitements de l'infini qualitatif. Cette omission aurait mérité, à tout le moins, une explication.
[92] Hegel SL p. 73, WL, p. 83.
[93] Ibidem Si, p. 109, WL, p. 121.

relever tout ce qu'il doit au calcul différentiel, bien que dans cette «théorie de l'être» il n'en soit nullement fait mention. Tout d'abord, dans le «quelque chose» que la pensée détermine, l'attribution d'une qualité le situe par rapport à une chose autre qu'il aurait pu être et cette détermination va se traduire ensuite par l'apparition d'une délimitation ou d'une «limite»[94]. [On peut remarquer, au passage, que tous les exemples — les premiers de l'ouvrage — fournis par Hegel ont sans exception un caractère mathématique: géométrie avec le point, la ligne, la surface, arithmétique: «le centième est à la fois la limite, mais aussi l'élément de la centaine entière»][95]. Mais la limite appelle un dépassement et ainsi le fini qu'elle sert à définir ou à constituer apparaît d'emblée comme instable.

Hegel introduit alors un nouveau couple «devoir-être/borne» pour affiner le précédent, «détermination/limite» = Le «devoir-être» représente le processus toujours renouvelé de dépassement, d'altération du quelque chose tandis que la «borne» rappelle la fixité de «la limite». Le «devoir-être» n'est pas introduit de l'extérieur, mais si l'on prend en compte, le stade extrêmement élémentaire où se situe la démarche hégélienne, l'idée d'une détermination vide, qui caractérise l'être-là, appelle une détermination plus concrète, et même si on ne sait pas encore ce que sera ce nouvel élément, il est là, en un sens, par contraste. Le devoir-être est, donc, déjà un dépassement de la «borne», un dépassement du fini, mais il est abstrait et unilatéral parce que déterminé exclusivement à partir du fini. Le fini et sa négation - «le mauvais infini » - sont dans une position de détermination réciproque.

Mais alors «le fini et l'infini forment ensemble le fini». Le véritable Infini sera la négation de cette finitude. Ainsi le Fini et l'Infini ont chacun un double sens :

> Le double sens du Fini consiste en ce qu'il n'est le Fini que par rapport à l'Infini en présence duquel il se trouve ; et aussi dans ce qu'il est à la fois le Fini et cet Infini en présence duquel il se trouve. L'Infini a également un double sens qui consiste en ce qu'il est un de ces deux moments (tel est le cas du faux Infini) et qu'il est l'Infini

---

[94] «Quelque chose» ou «chose autre« ne doivent pas être pris ici comme des termes génériques désignant des objets concrets. Il s'agit là de structures abstraites comme le souligne Fleischmann. On pourrait, d'ailleurs, peut-être, rendre mieux l'« Etwas» par le «ça» si ce terme n'avait reçu une autre acception. Il faut relever néanmoins que, ici et là. Hegel semble fournir des illustrations — ce qui n est pas superflu, vue l'aridité du raisonnement —- mais introduit des ambiguïtés.

[95] Ibidem, SL p. 126, WL p. 138.

qui ne contient lui-même et son autre que comme des moments[96]. En résumé, dans le vrai Infini trouvent leur unité, deux paires contradictoires, la paire affirmative du «quelque chose» et de la «limite», la paire négative du «devoir-être» et de la «borne», mais cette unité n'est pas «l'unité en repos de deux termes identifiés l'un à l'autre par l'évanouissement de leurs différences»[97], mais «elle ne peut être conçue essentiellement que comme un devenir»[98].

Parvenu à ce point qui achève, pour l'essentiel, la présentation de l'infini qualitatif, on a, sans doute, été souvent tenté de s'arrêter en route: Fleischmann parle «des longueurs inexcusables de l'exposé hégélien» et pour notre part, nous reconnaissons avoir pris quelques raccourcis — éliminant l'«être-en-soi» et 1'«être-pour-un-autre» — (il est vrai que l'exposé de Hegel lui-même, de 1832 dans L'*Encyclopédie* est nettement abrégé sur les thèmes considérés). Pourtant, il nous semble que nous ne nous sommes pas égarés et qu'il valait la peine de découvrir les énoncés auxquels nous sommes parvenus. En effet, que nous apprend Hegel? L'infini (le vrai) «contient» l'infini (le mauvais). Il faut que la terminologie hégélienne soit bien opaque pour qu'à notre connaissance, la ressemblance de cet énoncé avec le théorème de la théorie des ensembles selon lequel «tout ensemble infini I est équivalent à un sous-ensemble de I»[99]) n'ait jamais été relevé. Certes, le «vrai infini» de Hegel entretient avec le mauvais infini» une relation plus complexe que les ensembles «infinis» qui sont équivalents avec l'un de leurs sous-ensembles et que Russel a appelé «réflexifs», mais, après les «maîtres du soupçon» qui nous ont appris à voir causes cachées et antécédents aussi obscurs qu'ils soient, on aurait pu penser que la quasi-coïncidence des énoncés considérés ne serait pas passée inaperçue. Nous n'entendons pas ici conduire une comparaison systématique de la logique mathématique et de la logique dialectique[100] mais un élément — au moins — incite à penser que la coïncidence n'est pas fortuite, que ce n'est pas, pour reprendre une expression de G. Granel, dans «une espèce de somnambulisme» que Hegel est parvenu à sa formulation: la démonstration du théorème indiqué repose sur une partition en - au moins - deux sous-ensembles et une comparaison systématique de l'un de ces sous-ensembles avec l'ensemble infini; or, toute la démarche de Hegel repose, aussi, sur une partition entre

---

[96] Ibidem, SL p. 151, WL p. 163.

[97] Biard, p. 92.

[98] Hegel. SL p. 151. WL p. 163.

[99] A. Fraenkel fournit 2 démonstrations de ce théorème cf. A. Fraenkel, 1966 pp. 27.

[100] A Fraenkel écrit que «l'infini actuel a été discute après Aristote par de grands philosophes tels (…) Descartes. Spinoza. Leibniz, Locke. Kant. etc. (sic).» (p. 2). Voilà Hegel.qui a parlé avec tellement de contemption du « mauvais infini» que représente la progression illimitée, relègue dans un etc.!

le «quelque chose» et le «chose-autre» a l'intérieur de l'«être-là» et c'est de cette dialectique que Hegel tire son affirmation. A cela s'ajoute encore la proximité entre certains aspects du raisonnement de Hegel et une «illustration» de l'infini actuel, dont l'origine remonterait à Bolzano, et qui est reprise aussi par Dedekind. Ces auteurs s'interrogent sur la possibilité de concevoir un infini actuel et ils suggèrent l'exemple suivant: soit «la proposition A est vraie», si l'on admet que «la proposition, selon laquelle «la proposition A est vraie» est concevable» [càd distincte de la première proposition et susceptible de détermination par elle-même, d'être donc vraie ou fausse indépendamment de A] et vraie, alors on peut concevoir aussi «la proposition selon laquelle la proposition est vraie selon laquelle la proposition A est vraie» et tenir cette proposition pour vraie. Naturellement, on a affaire là a une progression illimitée. Telle est l'illustration de Bolzano-Dedekind. Quand Bertrand Russel analyse cette illustration, il la replace précisément dans le cadre de la scission objet/sujet :

> «L'argument de Bolzano/Dedekind est le suivant: l'objet et son idée ne se confondent pas mais il y a une idée de tout objet. La relation de l'objet à l'idée est une relation de «un â un» et les idées sont seulement une partie du milieu des objets. Par conséquent la relation «l'idée de» (dans notre présentation: la proposition selon laquelle…) constitue une réflexion de la classe entière des objets sur une partie d'elle-même, càd la partie que forme les idées. Par conséquent, la classe des objets et celle des idées sont toutes deux infinies ».

Russel trouve l'argument intéressant mais le rejette, nous n'examinerons pas ses motifs, car nous voulons seulement retenir le parallélisme des démarches de Bolzano/Dedekind d'une part et de Hegel d'autre part: dans les deux cas, l'origine se trouve dans la reconnaissance de la scission objet/sujet dont il s'agit d'explorer les conséquences[101].

Il faut relever ici que l'affirmation de l'infini actuel est «illustrée» par un processus «idéel» dont le contenu est pratiquement vide et que l'infini actuel est bien présenté d'abord comme une régression (progression infinie). Que l'on relise les paragraphes de Hegel sur le «passage du fini à l'infini ou sur l'infinité affirmative» et l'on verra que c'est bien par la progression infinie — de la pensée et d'une pensée à peine formulée, presque vide — que Hegel nous conduit à l'infini! Ces rapprochements devraient convaincre les plus sceptiques que cela vaut — à tout le moins — la peine d'aller voir ce qu'écrivait Hegel.

[101] Cf. Russell, p. 169.

Ce n'est pas l'opinion, apparemment, de R. Blanché dans son manuel d'histoire de la logique qui consacre moins de quinze lignes à Hegel. Il est vrai qu'il n avance aucun argument, si ce n'est l'argument d'autorité:

> «les historiens de la logique, lorsqu'ils ne préfèrent pas la passer complètement sous silence, jugent sévèrement cette déviation de la logique: the curious mixture of metaphysics and epistemology which was presented as logic, dit W. Kneale ; et Jörgensen : the numerous dialectic eccentricities of the later romantic logic, which was altogether ruinous to sound formal logic»[102].

Quant à L. Brunschvicg, s'il est mieux disposé à l'égard de Hegel en général, il ne semble pas avoir été particulièrement attentif à la Science de la logique: en effet, il écrit «Ce qui caractérise l'ensemble infini, c est qu'il est partie intégrante de lui-même. La théorie des ensembles incorpore à titre d'idée claire et distincte, la notion philosophique de l'infini telle que Kant et Pascal l'avaient déjà rencontrée» ; on notera, tout d'abord, que cet auteur décrit, de façon incorrecte, le théorème de la théorie des ensembles en posant l'identité du «contenant et du contenu». (L'ensemble des entiers naturels est infini et le sous-ensemble des entiers naturels pairs est aussi infini). Mais si cela est bien «la caractéristique» de l'ensemble infini, alors on ne peut dire que Pascal £t Kant l'avaient rencontrée et d'ailleurs les citations de ces auteurs, fournies par Brunschvicg, n'indiquent nullement — «l'infini est une grandeur que l'on ne peut augmenter ni diminuer» — l'idée d'un infini au-delà de l'infini que nous trouvons pour la première fois chez Hegel et sous une autre forme dans la théorie des ensembles.

La genèse de la quantité

Dans la démarche de Hegel, l'infinité qualitative n'est pas la dernière étape avant d'aborder la quantité. En effet, il s efforce, encore, en restant dans le plan de la qualité, de faire surgir la quantité. Sans prétendre résumer les longs développements de l'être-pour-soi» qui font intervenir de multiples catégories traduisant la richesse de l'analyse hégélienne mais obligeant à passer par une terminologie qui est - au moins en français - aussi rebutante qu'elle peut être éclairante, nous croyons utile d'insister sur quelques points. Partant de l'«être», (c'est-à-dire aussi bien du «néant»), Hegel est parvenu en étudiant l'«être-là» (c'est-à-dire «l'être déterminé») à l'infinité qualitative qu'il illustre par l'image du cercle. Parvenu à ce point et soucieux de bien montrer l'opposition entre le «mauvais infini» et le «vrai infini», Hegel recourt à l'exemple suivant :

---

[102] Cf. R. Blanché p. 248. L. Brunschvicg, p. 238.

«L'image de la progression à l'infini est représentée par la ligne droite, aux deux limites de laquelle il n'y a que l'Infini, et celui-ci n existe toujours que là ou la ligne (qui est un être-là) s'avance vers son non-être-là, c'est-a-dire vers l'Infini. Quant à la véritable Infinité, revenant à elle-même, son image est représentée par le cercle, c'est-à- dire par la ligne qui a réussi à se rejoindre, qui est close et tout à fait sans commencement m fin»[103].

Après avoir souligné le caractère «mathématique» de l'illustration hégélienne, nous notons que cette image marque bien la fermeture sur soi à laquelle nous parvenons en étudiant «l'être-là», ce que Hegel appelle «l'être-pour-soi». Mais ce repliement attire négativement l'attention sur l’altérité. Le «un» (pris au sens d'unité) appelle, produit le «multiple», l'unicité renvoie à la multiplicité, la résorption des différences qualitatives va faire apparaître la « quantité ».

Le traitement de la quantité présente une grande ressemblance avec celui de la qualité. Il se développe en trois chapitres : la quantité pure, le quantum et le rapport quantitatif faisant pendant à l'être pur, l'être- là et l'être-soi. L'infinité quantitative apparaît, ainsi, au milieu de la progression (dans l'étude du quantum), comme l'infinité qualitative apparaissait dans l'étude de l'être-là. Cette analogie n'est pas un pur décalque, néanmoins, malgré l'intérêt de remarques de Hegel sur l'opposition continu/discret, sur l'origine du nombre, etc. nous nous appuierons sur elle pour nous contenter d'une brève esquisse de ce qui précède directement les remarques hégéliennes sur le calcul infinitésimal.

Il est important de rappeler la nature de la démarche hégélienne qui se veut explication du penser, conduite sans présupposés. Ici nous sommes parvenus à la quantité qui est apparue comme résultant d'une tension entre unité et altérité ou homogénéité et hétérogénéité. C'est en appuyant sur cette seule genèse que Hegel va introduire la continuité et la discontinuité renvoyant respectivement à l'unité et à l'altérité. Le traitement hégélien de la continuité et de la discontinuité rappelle celui de l'être et du néant, à cette différence que pour Hegel le continu et le discontinu s'incluent mutuellement. Il n'y pas d'équivalent du va-et-vient de l'être et du néant mais une implication mutuelle. La grandeur constitue l'unité négative du continu et du discontinu. Mais cette position instable appelle une délimitation entre ces deux aspects de la quantité. Ainsi apparaît le «quantum» ou la «quantité déterminée». La précision du quantum s'effectue grâce au nombre dont la naissance est ainsi présentée de façon purement logique. L'enchaînement des déterminations conduit au degré (opposition nombres cardinaux et ordinaux) et au changement quantitatif débouchant sur le progrès infini. C'est l'occasion pour Hegel de se livrer à

---

[103] Hegel, SL p. 152; WL p.164.

un examen de la nature des mathématiques et de leur utilisation de l'infini. L'enchaînement part de la transformation du «quantum»: ce qui limite un «quantum», c'est un autre «quantum» plus grand. Donc, la limite du quantum reste de l'ordre du quantitatif (à la différence de la limite qualitative: au-delà d'une qualité particulière, on a affaire, à une qualité autre). On tombe, donc, en opposant la limite au quantum dans une progression illimitée — le «mauvais infini quantitatif». Est-ce a dire que les mathématiques ne saisissent pas le vrai infini? Ici Hegel défend la mathématique en partant des définitions de l'infini mathématique: si celui-ci est «une grandeur après laquelle il n existe pas de grandeur plus grande» alors il n'est plus un quantum» «puisque «une grandeur en mathématique est définie comme quelque chose qui est susceptible de subir une augmentation ou une diminution; donc, d'une façon générale, comme une limite indifférente»[104]. Dès lors la thèse de Hegel s articule ainsi: l'infini mathématique, d'après sa définition échappe en quelque sorte au quantitatif, c est ainsi bien le vrai concept de l'infini (qualitatif) qui inspire ¡es mathématiques. C'est ce qui explique la fécondité de son utilisation en mathématiques, mais en même temps comme les mathématiciens ne l'ont pas reconnu, cela explique également les difficultés qu'ils rencontrent et à la résolution desquelles Hegel entend apporter une contribution décisive. C'est l'objet des fameuses «remarques» du chapitre II, section II de la Logique, mais avant d'en aborder l'examen, il convient de préciser la place de la formalisation dans la théorie de la science ou du savoir- de Hegel.

B — Formalisation et conceptualisation

Les «Notes» hégéliennes sur le calcul différentiel n’ont eu, à notre connaissance, aucune influence directe et explicite sur le développement des mathématiques et, en général, les commentaires qui en ont été faits leur dénient même tout sens mathématique. Il s'agirait d'un discours extérieur aux mathématiques dont la validité — et l'intérêt — relèverait essentiellement de la philosophie. Il y a quelques explications à cet état de fait. Tout d'abord, les remarques générales sur le discours hégélien et sa réputation pas tout à fait usurpée d'obscurité sont valables ici, ensuite Hegel ne s'embarrasse pas toujours de la délimitation des domaines de validité de ses propositions. Cette absence choque aujourd'hui le lecteur frotté aux mathématiques contemporaines. Il est cependant équitable de faire remarquer que bien des manuels du début du XIXe de mathématiques ne se souciaient pas plus que Hegel de ces questions. Il faut également indiquer que le vocabulaire mathématique a considérablement évolué depuis le XIXe et évoluait au moment même ou

[104] Ibidem, SL. p. 267 WL, pp. 282/283.

Hegel écrivait, aussi pour évaluer la portée mathématique éventuelle des raisonnements hégéliens convient-il de replacer leur formulation dans le langage mathématique de son époque. Nous avons déjà signalé la capillarité du vocabulaire hégélien et mathématique (limite, bornes, différences...). D'autres formulations, encore, correspondent à des emprunts aux mathématiques, ainsi dans le passage suivant quand Hegel distingue dans l'objet du calcul différentiel :

> « 1° Des équations: plusieurs grandeurs (nous pouvons, d'une façon générale, nous en tenir à deux), y sont réunies et forment un Tout qui trouve sa précision en des grandeurs empiriques formant pour ainsi dire ses limites fixes, ainsi que la manière dont les grandeurs en question sont associées à ces grandeurs empiriques, et entre elles, comme c'est généralement le cas des équations; mais comme il n'y a qu'une équation pour les deux grandeurs (de même que, relativement, plusieurs équations pour plusieurs grandeurs, mais toujours en nombre moindre que celui des grandeurs), ces équations font partie de la catégorie des équations indéfinies; et, d'autre part, la précision que possèdent ces grandeurs tient à ce qu'elles (ou, du moins, l'une d'entre elles) existent dans l'équation à une puissance *plus élevée* que la *première*.
>
> A ce propos, il convient de faire quelques remarques. En premier lieu, les grandeurs, d'après la première des déterminations que nous donnons ici, possèdent tout à fait le même caractère de grandeurs variables que celui que présentent les grandeurs figurant dans les problèmes de l'analyse indéfinie. Leur valeur est l'indéterminée, mais de telle sorte que si l'une d'elles reçoit d'ailleurs une valeur parfaitement précise, une valeur numérique par exemple, l'autre devient définie à son tour, si bien que l'une est fonction de l'autre »[105].

La présentation hégélienne ne doit pas surprendre, c'est que le concept de fonction ne faisait qu'apparaître à la fin du XVIIIe-début XIXe et la définition de Hegel supporte la comparaison avec la remarque suivante de l'historien des mathématiques, C. Boyer:

[105] Hegel, SL p. 308. WL p. 326.

> «D'Alembert — comme Newton et Leibniz — semble penser non pas à une fonction, mais aux deux membres d'une équation dont les limites sont égales»[106].

Cette formulation, par conséquent, témoigne plutôt d'une bonne compréhension des mathématiques de l'époque. C'est pourquoi nous estimons qu'il ne faut pas tirer de conclusion hâtive de l'absence de formalisation dans la *Science de la Logique*. Au contraire nous sommes persuadés que Hegel se basait sur des travaux mathématiques pour avancer dans sa démarche, travaux peut-être personnels ou tout au moins revue de première main des grands mathématiciens. Nous pensons également que telle était l'opinion de Marx et d'Engels (peut-être cette opinion se fondait-elle sur des renseignements relatifs au contenu des manuscrits laissés par Hegel comme la lettre d'Engels à Lange le laisse entendre[107], et que Marx a cherché à retrouver, à développer cette base de la Logique. Cet arrière-fond hégélien est ainsi un clé essentielle des MMM. Un économiste ne trouvera sans doute pas ces affirmations paradoxales même si elles demandent quelques éclaircissements; en effet, nous savons que de très grands économistes mathématiciens se sont efforcés de reléguer les démonstrations par lesquelles ils faisaient progresser l'économie mathématique dans d'obscurs appendices tandis que leurs manuels ou leurs principes ne contenaient qu'un minimum d'indications formalisées. Même si dans l'économie contemporaine, la «démonstration mathématique» tend à occuper sinon toute la place, au moins la première place, nous estimons impossible de tirer des conclusions de l'absence de formalisation et nous croyons nécessaire de procéder à une évaluation préalable de cette" formalisation et de la restituer dans son contexte historique. Mais avant de nous tourner plus avant vers ces problèmes, nous soulignerons encore que notre interprétation éclaire la lettre de Engels:

> «Ainsi ce vieil Hegel avait raison quand il disait que la conclusion fondamentale de la différentiation était que les variables soient élevées à des puissances différentes et que l'une au moins soit à la puissance 2 ou 1/2. Nous savons maintenant pourquoi».

Engels reçoit les MMM comme la démonstration qui ne figure pas — ce qui ne signifie pas que Hegel ne l'avait pas — dans la *Science de la Logique*. Il faut relever, en passant, que la réaction de Engels est très elliptique et quelle indique, par sa brièveté même, et la familiarité avec la Logique de Hegel et sans doute un travail et des discussions communes

[106] C. Boyer. p. 254.
[107] Cf. supra, p. 24.

sur ces sujets. Faut-il aller plus loin dans cette interprétation de Engels et penser que ce n'est pas seulement dans le cas de la différentiation que Hegel pourrait avoir eu des «démonstrations» — une formalisation mathématique du raisonnement — sans la publier ? Nous pensons que cela est possible et que pour répondre ainsi on peut s'appuyer sur le texte même de Hegel, en effet il conclut ces notes par une évaluation générale de la symbolique que nous reproduisons ci-dessous:

Aussi longtemps qu'on ne se sert de l'expression potentielle qu'à titre de symbole, on ne peut pas plus blâmer ceux qui le font qu'on ne blâme ceux qui se servent de nombres ou de symboles d'une autre nature à la place de concept; mais ce procédé mérite les mêmes reproches que la symbolique en général, destinée à exprimer de pures déterminations conceptuelles ou philosophiques. La philosophie n'a pas besoin d'une aide pareille, qu'elle soit empruntée au monde sensible ou l'imagination ou même aux sphères de son propre domaine, car lorsque ces sphères ont un caractère subordonné, les déterminations qui leur sont empruntées ne sont pas applicables aux sphères plus élevées et au Tout. C'est ce qui arrive, lorsqu'on applique, en général, à l'Infini les catégories du Fini; les déterminations courantes de force, de substantialité, de cause et d'effet, etc., ne sont, elles aussi, que des symboles servant à l'expression de situations vivantes et spirituelles par exemple, autrement dit elles sont de déterminations non conformes à la vérité ; et ceci est vrai, à plus forte raison, des puissances du quantum et de puissances dénombrées lorsqu'on les emploie pour l'expression de situations de même genre et de situations spéculatives. Si l'on veut se servir de nombres, de puissances, de l'Infini mathématique, etc., non à titre de symboles, mats à titre de formes pour les déterminations philosophiques, voire de formes philosophiques comme telles, on doit commencer par montrer en quoi consiste leur signification philosophique, autrement dit quelle est leur précision conceptuelle. Si l'on y réussit, tous ces symboles deviennent des désignations superflues; la précision conceptuelle se désigne elle-même, et c est cette désignation qui est la seule correcte. L'emploi des formes dont nous venons de parler ne constitue rien de plus qu'un moyen commode de s'épargner la peine de rechercher les déterminations conceptuelles, de les développer et de les justifier»[108].

Nous sommes frappés dans ce texte, tout d'abord, par la distinction opérée par Hegel monde sensible/imagination/sphères philosophiques subordonnées. Il y a là une oscillation du vocabulaire importante : la mathématique, sphère subordonnée à ia philosophie ou de la philosophie? Dans le contexte, il apparaît que la mathématique qui est dans une

---

[108] Hegel. SL. pp. 366-367; WL p. 386.

situation limite entre le sensible et le philosophique tend à être comprise dans ce dernier. Mais, pour la question qui nous occupe ici, c'est la fin du texte qui est la plus intéressante ; elle donne une grande plausibilité à notre hypothèse d'un Hegel pratiquant les mathématiques pour développer son raisonnement, mais considérant ces démonstrations «superflues», le résultat, câd la précision conceptuelle, atteinte. Dès lors, la publication de ces notes mathématiques ne serait qu'une concession aux lecteurs qui «s'épargnent la peine de rechercher les déterminations conceptuelles» comme une expérience de presque vingt ans avait du en convaincre Hegel — en effet, la seconde édition développe les indications de la première, mais la bibliographie mathématique de Hegel était constituée en 1812 et significativement la seule indication postérieure figure en note de bas de page. Le point a de l'importance dans la mesure où il conditionne la lecture que l'on peut faire des considérations hégéliennes sur le calcul différentiel : discours extérieur, plaqué sur la mathématique et dont la prétention justifierait et la honte rétrospective des philosophes et le mépris hautain des mathématiciens que nous signalons au début ou bien confrontation impliquant l'usage des mathématiques par le philosophe, au moins jusqu'à un certain point. Pour notre part, nous optons résolument pour la seconde branche de l'alternative persuadés que nous sommes que la mathématique ne se laisse pas définir par l'usage d'une formalisation symbolique et qu'il ne faut pas surestimer l'importance des démonstrations. Sur ce dernier point, nous sommes confortés par René Thom :

«On a d'ailleurs très probablement surestimé l'importance de la rigueur en mathématique. De toutes les disciplines scientifiques, la mathématique est celle où la rigueur est a priori la moins nécessaire. Quand un mathématicien X publie la démonstration d'un théorème, son lecteur Y est à même de contrôler les assertions de X. Il peut dire: la démonstration me semble correcte et je suis convaincu; ou bien: je ne comprends pas tel ou tel point, tel lemme me semble peu clair, tel raisonnement a une lacune. Au contraire dans les disciplines expérimentales, la situation est tout à fait différente: quand un expérimentateur A présente le résultat d'expériences faites en son laboratoire, il peut me donner tous les détails voulus quant à la procédure suivie (…). je n'ai aucun moyen de vérifier l'exactitude de ses dires et force m'est de lui faire confiance»[109].

En réalité, nous ajouterions plutôt «ou de procéder à une nouvelle expérience» et ici nous sommes dans une situation assez analogue: c'est en définitive, la fécondité éventuelle de la seconde branche de l'alternative qui tranchera. Mais avant même d'examiner le calcul différentiel de

---

[109] R. Thom, 1974, pp. 49-50.

Hegel, il faut noter que c'est Hegel lui-même qui affirme la portée mathématique de ses Notes. Quand il écrit: «Nous croyons pouvoir contribuer a l'élucidation de la nature de la chose elle-même»[110]. II est d'autant moins possible de voir là un discours extérieur aux mathématiques. càd une interprétation philosophique d'un discours mathématique achevé en tant que tel, que Hegel ne croit nullement que Lagrange — en dépit des mérites qu'il lui reconnaît — ait dit le «dernier mot» C'est très explicitement qu'il attend des développements mathématiques en la matière, — attente qui contredit la lecture de J.T. Desanti — et qu'il les évoque : «le jour où on aura trouvé le moyen d'abstraire autrement qu'on ne l'a fait jusqu'ici de la partie réelle des mathématiques qu'on appelle calcul différentiel le côté général du procédé, les principes dont nous venons de parler et les efforts faits pour les trouver se révéleront inutiles»[111].

Nous trouvons encore une confirmation de notre interprétation dans le traitement hégélien du nombre. Revenons, pour l'analyser sur l'enchaînement: quantité —> quantum. La quantité apparaît comme le dépassement (négation et conservation) de l'«être-pour-soi» (la qualité saisie en elle-même). Mais alors elle ne contient pas de distinction entre grandeurs continue et discrète. Aussi est-ce poser le «Un» qui va opérer sur le continu une coupure en introduisant des déterminations de la quantité et entraîner le passage de la quantité (pure) aux quanta. Il s'agit d'une des parties de la *Logique* qui a été les plus considérablement remaniée d'une édition à l'autre dans leur formulation. Reprenons la conclusion de la seconde édition:

> «Comme le Un est une limite qui inclut les multiples Uns de la quantité discrète, elle les pose comme supprimes-conserves en lui. Elle est une limite de la continuité en général de sorte que la différence entre grandeur continue et grandeur discrète perd son importance ou plus exactement, elle est limite de la continuité aussi bien de la grandeur continue que de la grandeur discrète; l'une et l'autre effectuant ainsi le passage aux quanta». Et Hegel enchaîne: «Le quantum, qu'on peut définir tout d'abord et d'une façon générale, comme étant une quantité précise et limitée, n'atteint la précision complète que dans le nombre»[112].

---

[110] Hegel, SL, pp. 333-334 et WL p. 353 (il existe d'autres affirmations similaires disséminées dans ces «notes»; ci. p. 267).
[111] Ibidem, SL p. 308 et WL p. 326.
[112] Ibidem, SL pp. 216-217 et WL p. 231 (cf. pp. 80-S3 le sens de supprimé/ /conservé).

Après cette introduction plutôt hermétique, Hegel entre dans le traitement du nombre proprement dit en partant de la définition du nombre comme rapport (définition qui figure déjà au moins chez Newton). En examinant les deux expressions possibles du nombre (fraction ou série illimitée), Hegel s'efforce d'y introduire la dialectique du fini et de l'infini qu'il a étudié tant qualitativement que quantitativement. Les exemples de Hegel sont les suivants:

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\ ..\ \text{et}\ \frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + .$$

Ici, Hegel, avec délectation, heurte le sens commun des mathématiques en affirmant que «la série infinie est plutôt l'expression finie car déficiente, alors que l'expression soi-disant finie est en vérité, une expression infinie [= en raison de sa plénitude]»[113]. Mais il n'en reste pas à cette affirmation paradoxale *prima facie* et en répondant à une objection qu'il s'attendait se voir opposée, il écrit:

> «Il est de même de peu d'intérêt pour nous de savoir qu'il y a d'autres fractions que celle que nous avons prises comme exemples et qui transformées en fraction décimale ne donnent pas une suite infime mais chaque fraction peut être exprimée comme une suite infinie pour un système numérique ayant une autre unité»[114].

Cette affirmation de Hegel est loin d'être une évidence et ce n'est pas un résultat banal comme on peut s'en convaincre en consultant des ouvrages mathématiques. Pourtant, pour parler comme Engels, «Hegel a vu juste»: la suite des chiffres qui exprime un réel peut être limitée pour une base et illimitée dans une autre, par exemple, l/3 dans la base 10 sera représentée par la suite 0 (10°) 3 (10^{-1}) 3 (10^{-2}) 3 (10^{-2}). .., mais dans la base 3, la suite se limitera à 2 chiffres: 0 (3^{-1}) 1 (3^{-2}), de même 1/5 dans la base 10 sera représentée par la suite limitée 0 (10°) 2 (10^{-1}) mais dans la base 3 par la suite illimitée 0 (3^{-1}) 1 (3^{-2}) 2 (3^{-3}) 1 (3^{-4}). …, 0, 1, 2, 1, se répétant indéfiniment. Il serait difficile ici de soutenir que Hegel énonce un commentaire «philosophique» sur les mathématiques tant il est manifeste qu'il se contente d'énoncer un résultat qu'il n'a pu obtenir que par une manipulation numérique. Nous trouvons très significatif qu'il dédaigne pourtant de publier cette étape «subordonnée»".[115] Dans ces conditions, on

---

[113] Ibidem. SL p. 274 et WL p. 290. 114.

[114] Ibidem, SL p. 272 et WL p. 288.

[115] Cf. pour une introduction aux systèmes de numération Donnedu, pp. 97-106 ou Lexikon der Mathematik, pp. 604-610. La remarque de Hegel sur la transcription des nombres suivant les bases figure dans la le édition de la Logique (cf. traduction française, 1ère édition, p. 245) ce qui confirme notre interprétation: les notes mathématiques de l'édition de 1832 résultent, pour l'essentiel, d'une réflexion antérieure à la le édition elle-même.

comprend mal le reproche qui est régulièrement adressé à Hegel de rester à l'extérieur de la mathématique, d'autant que lui-même rejette expressément cette façon de faire allant jusqu'à reprocher à Barrow d'introduire des catégories développées ailleurs. Le passage suivant démontre le contresens que commettent ceux qui s'imagine Hegel observant de sa tour d'ivoire philosophique les mathématiques: «Il faut lire le texte même [de Barrow] pour se convaincre que ce procédé [les premières "méthodes" de différenciation] est exposée comme une règle extérieure [souligné par Hegel]» et il poursuit «en généralisant la forme de ces méthodes et en les appliquant aux sciences, Leibniz et Newton ont bien ouvert de nouvelles voies mais ils n'ont pas su enlever à ce procédé son caractère de règles extérieures et lui procurer la justification nécessaire ».

Il est exact, par contre, que Hegel croît effectivement que la délimitation du champ de validité des mathématiques est une nécessité pour la logique telle qu'il l'entend mais il pense également que cela peut faire progresser les mathématiques elles-mêmes et il n'hésite pas plus que ne le fera plus tard Marx à se placer, sans fausse modestie, à l'intérieur même du champ mathématique, «pour contribuer à l'élucidation de la nature de la chose elle-même». C'est que Hegel ne pense pas que le «dernier mot» ait été prononcé, au contraire il insiste sur le développement du «calcul» Cette idée de progression revient constamment: ouverture de «nouvelles voies» par Newton et Leibniz, «Lagrange s'est engagé sur la voie vraiment scientifique». En particulier, la méthode de Lagrange ne lui apparaît pas parfaite. C'est ainsi que, parlant de l'élimination de certains termes pour obtenir la dérivée, Hegel critique l'utilisation du développement en série qui risque toujours de faire apparaître la dérivée comme un résultat approché. C'est là pour Hegel qui, nous allons le montrer, soutient une toute autre — et audacieuse — interprétation, un point absolument capital qui donne d'autant plus de poids au jugement qu'il formule alors sur Lagrange: «La méthode de Lagrange n'est pas exempte de ce défaut»[116].

On voit donc que si Hegel ne cite pas de mathématicien ayant marqué l'histoire du calcul différentiel postérieur à Lagrange (il ne cite Cauchy ni Bolzano qu'il aurait pu connaître en 1831), cela ne signifie pas un aval complet à Lagrange, pour autant. Si, comme nous le pensons, les Notes existaient déjà pour l'essentiel sous forme de travaux préparatoires dès avant l'édition de 1S12, alors Lagrange était simplement le dernier chronologiquement[117].

---

[116] Hegel (SL , pp. 318/9 et WL pp. 336).

[117] Il s'agit d'une mauvaise conception de dy/dx et de ses conséquences pour l'interprétation du membre droit de l'équation. Cf. SL, pp. 337 et WL p. 357.

Comparaison entre le traitement hégélien de l'être et du néant et la place du un et du zéro dans les systèmes de numération.

Le traitement hégélien des nombres fractionnaires corrobore notre hypothèse, mais, avant de poursuivre et d'appliquer notre grille de lecture au calcul différentiel proprement dit, nous pensons utile de revenir au traitement de l'être et du néant pour la tester encore une fois. Reprenons, donc, le chapitre de transition entre la qualité et la quantité — donc entre l'infini qualitatif et le nombre. Ce chapitre, intitulé «l'être-pour soi» contient des développements sur r«Un» et le multiple. Il représente un des passages du chemin où nous invite Hegel, où les précipices du «doute et du désespoir» sont les plus menaçants au point que Hegel lui-même juge nécessaire d'attirer l'attention sur les difficultés des lignes qui suivent dans un paragraphe préliminaire "[118]. Le texte ne prétend pas être un exposé mathématique et même, explicitement, le stade où se situe Hegel précède, dans sa démarche, l'objet des mathématiques (càd la quantité). Nous pensons, néanmoins, que ces lignes difficiles sont éclairées si on les rapproche des certaines propriétés des systèmes de numération, rapprochement qui semble légitime puisque nous venons de voir que Hegel manifestement était averti des propriétés liées au choix de la base. En effet, dans les systèmes de numération, on rencontre deux nombres, le un et le zéro dotés des propriétés tout à fait particulières qui les distinguent de tous les autres nombres — or, on ne peut pas concevoir la numération sans penser d'abord le un et le zéro. Supposons résolue la conception du système de numération ; alors, pour construire un système particulier il faudra choisir une base de façon à faire correspondre une suite de chiffres à chaque nombre. Nous avons vu plus haut que, suivant la base, suivant la base cette suite pouvait être ou non illimitée mais si nous nous intéressons maintenant au choix de cette base, nous voyons qu elle ne peut être ni zéro ni un. On retrouve ici un rapprochement du un et du zéro qui n’est pas sans rappeler celui de l'être et de néant du chapitre I de Hegel. Mais l'on peut poursuivre la comparaison. Suivant le système de numération choisi, à chaque nombre correspondra une suite — différente — de chiffres — qui le représentera, ceci est vrai de tous les nombres sauf du un et du zéro qui seront toujours représentés par la même collection de chiffre — respectivement 1 et 0 (les signes} et 0 n'étant ici que des symboles, la représentation du un et du zéro pouvant être arbitrairement figurée). Ce n'est pas tout; les chiffres renvoient aux différentes puissances, positives, nulles ou négatives, de la base, on peut prendre le chiffre correspondant à b", (la base à la puissance zéro) comme point de repère dans la série des chiffres — ainsi dans la numération décimale, la virgule en France ou le point dans les pays anglo-saxons séparent les

[118] Hegel. SL, p. 169 et WL p. 182.

chiffres correspondants aux puissances positives et nulles d'une part et négatives d'autre part. Alors on constate bien, empiriquement, en fonction du choix de la base, un phénomène d'«attraction et de répulsion»: la collection de chiffres sera plus ou moins longue à droite ou à gauche suivant la grandeur de la base choisie. Nous ne savons naturellement pas jusqu'où Hegel connaissait les propriétés des systèmes de numération, mais il n'est pas exclu que le chapitre sur «l'être-pour-soi» soit une tentative pour leur trouver un fondement qualitatif et les décrire «avant l'apparition du nombre». Nous tenons pour encore plus légitime d'utiliser les propriétés du un dans les systèmes de numération, pour éclairer les développements consacrés aux «uns» que nous citions plus haut.

Mais nous pouvons relire le chapitre initial sur l'être et le néant en nous aidant des propriétés des systèmes de numérations. Nous noterons, tout d'abord, que la relation de puissance sur laquelle Hegel insiste beaucoup dans les *Notes II* et *III* sur le calcul différentiel est étroitement liée au problème de la numération — comme nous l'avons indiqué, on construit un système de numération dans une base quelconque à partir des puissances de cette base. Or l'analyse mathématique moderne, qui relève cette invariance commune au un et au zéro quand on change les bases de la numération, pose également:

$$I^1 = I^0 = x^0 = 1$$

Il faut insister sur un point: l'exposant n'est pas un symbole mais désigne des opérations dans lesquelles le nombre exposant intervient en tant que nombre. Ces opérations n'ont rigoureusement pas de sens effectuées avec le zéro (x^a = x.x... La multiplication de x par lui- même doit être effectuée a fois mais alors *quid* si a = 0?).

Pourtant, la cohérence de la numération exige: $x^0 = 1$ et en particulier: $l^1 = 1^0$, c'est dire qu'elle postule que le zéro et le un sont ici — en tant qu'exposant — identiques.

Il faut réellement que le rejet de la vieille métaphysique ait eu des effets d'entraînement ou d'aspiration incontrôlés pour que — «pendant des dizaines d'années sa philosophie [= de Hegel ait joué le rôle de souffre-douleur et d'épitomé de la mauvaise spéculation pour les sciences empiriques»[119] alors même que Hegel a annonce ce rejet et en a pris acte. Il est surprenant, en effet, que Hegel passe pour un obscur métaphysicien — «entièrement a- mathématique» — quand il s'efforce de montrer que «l'être pur et le néant pur sont, donc la même chose» (càd compte tenu de

[119] Gadamer, p. 200.

l'ensemble du raisonnement) ou « «l'être et le néant sont des moments inséparables de l'Un» alors que l'analyse mathématique moderne est conduite, par souci de «rigueur», à poser: $I^1 = I^0$.

En conclusion, nous estimons que la lecture de Hegel est éclairée par l'histoire des mathématiques et leur mouvement et que ce n'est pas un hasard qui justifie ce rapprochement. C'est que, tout d'abord Hegel était «informé» de la pensée mathématique de son époque et surtout avait un sens aigu de son développement depuis les Grecs ; et ensuite de telles rencontres étaient prévisibles entre la logique dialectique de Hegel et la mathématique puisque, dans celle-ci, des situations dans lesquelles se présente «le problème de l'existence éventuelle de synthèse du type : T + (non T) —» S (...) sont courantes »[120]. Nous n'entrerons pas ici dans une discussion de fond sur la nature des mathématiques mais nous allons montrer concrètement ce rapprochement dans le cas du calcul différentiel.

1 — Hegel et le calcul infinitésimal

C'est en rapprochant le texte de Hegel des développements les plus récents de l'analyse mathématique que nous entendons illustrer la rencontre entre la logique dialectique et l'histoire des mathématiques. Nous distinguerons dans les Notes de Hegel ce qui a trait à la nature des infiniment petits de ce qui concerne les règles de calcul qui portent sur eux. Dans ce développement, nous avons adopté une terminologie qui suit l'usage de Hegel: nous désignons par «différentielles» les différences infiniment petites dx, dy. Il ne s'agit donc pas exactement de se que la mathématique de la fin du XIXe ou du XXe entend par ce terme (Marx avait été sensible à cette distinction et dans les MMM, il parle de «différentielle» pour les dx, dy, comme Hegel et de «différentiales» dans l'autre sens.

La nature des différentielles — et les nombres non-standards :

Hegel aborde cette question à partir de la définition du nombre comme rapport et de ses deux expressions'-(fraction ou série illimitée). Nous avons vu que c'était l'occasion pour Hegel d'opérer un renversement entre fini et infini et il poursuit en réexaminant la place de l'infini (infiniment grand et infiniment petit) dans les mathématiques. C'est l'objet de la noie I. Suivons Hegel:

> La définition ordinaire de l'Infini mathématique est celle-ci: il y a une grandeur après laquelle si elle est l'infiniment grand, il n'existe pas de grandeur plus grande ; ou lorsqu'elle est définie comme

120

> l'infiniment petit, il n'y a pas de grandeur plus petite ; ou encore la grandeur infiniment grande est plus grande, la grandeur infiniment petite plus petite, que n'importe qu'elle autre (.) [or| une grandeur est définie en mathématique comme quelque chose qui est susceptible de subir une augmentation ou une diminution (...) [donc] étant donné que l'infiniment grand et l'infiniment petit ne peuvent être l'un augmenté, l'autre diminué, ni l'un, ni l'autre ne sont plus en fait des quanta[121].

Nous voyons que, d'emblée, Hegel attire l'attention sur la nature de l'infini (sa «qualité», sa «détermination», sa «précision», sa «déterminité», selon différentes expressions hégéliennes et/ou traduction). Ensuite Hegel constate que «dans les équations» [nous avons vu que pour lui cela signifiait aussi fonction!: «x et y doivent [...] avoir la signification de quanta. Or cette signification se perd tout à fait dans ce que l'on appelle les différences infiniment petites, dx, dy qui ne sont plus des quanta et n'ont plus la signification de quanta (...). Ils ne sont plus quelque chose, le quelque chose étant pris comme quantum ; ils ne sont pas des différences finies mais ils ne sont pas non plus rien, un zéro dépourvu de toute détermination (...). Dans ce concept, de l'Infini, le quantum s'élève vraiment à une existence qualitative ; il est posé comme réellement infini ; il n'est pas en tant que tel ou tel quantum mais en tant que quantum tout court»[122].

C'est bien la qualité de nombre des dx, dy qui fait problème pour Hegel. Que penser de ces propositions? Il est frappant de constater la similitude absolue de cette présentation avec l'introduction à l'analyse non-standard de J. Harthong: «en pratique pour le mathématicien, un nombre n'est entièrement défini que par la suite infinie de toutes ses décimales (...). On ne peut donc spécifier un nombre que si on donne une loi gouvernant la formation des décimales successives, (algorithme qui permet de définir le nombre)». Harthong poursuit: «parmi tous les algorithmes possibles on conçoit aisément que (certains) sont si complexes qu'il faudrait des centaines et des millions d'années rien que pour les énoncer (...) et ces algorithmes que nous sommes capables de décrire sont des cas particuliers extrêmement rares et privilégiés (...). On est ainsi conduit à établir une distinction qualitative entre les nombres»[123]. C'est la fameuse définition des nombres standards et non-standards.

Depuis Weierstrass, les mathématiciens ne se référaient plus aux infiniment petits que «pour la commodité du langage», quand, en 1960, Abraham Robinson a démontré que les infiniment petits existaient en tant

---

[121] Hegel, SL, p. 267, WL p. 282. 122.
[122] Ibidem, SL. p. 279, WL pp. 295-6.
[123] Harthong, p. 1197.

qu'objet mathématique ; sa démarche est partie de la réflexion que nous propose Hegel: la définition des nombres réels ne convient pas aux infiniment petits, il faut donc ou les abandonner ou modifier cette définition. C'est la seconde branche de l'alternative que retient Robinson posant l'axiome n° 1 de l'Analyse non-standard: «Il existe une extension R* des nombres réels R». Les éléments de R* sont appelés hyper-réels. Un élément de R* peut être infinitésimal si $|x|<r$ pour tout nombre positif réel r; fini si $|x|<r$ pour certaines valeurs positives de r, infini si $|x|<r$, pour tous les nombres réels r. R* contient ainsi 3 «qualités» de nombres, les réels, les infinitésimaux, les infinis». A côté des nombres infinis admis par Cantor, cet axiome n° 1 affirme, donc, l'existence des nombres infinitésimaux. Avant de reprendre en détail la distinction hégélienne quantum/différentielle (càd pour Hegel les différences infiniment petites dx, dy) il convient de souligner le parallélisme frappant entre traitement hégélien et analyse non-standard, dont nous montrerons qu'il concerne également les règles de calcul avec les infiniment petits[124]. Toutefois, il convient auparavant de préciser la place de l'analyse non standard dans notre argumentation puisque nous appuyons notre défense de la compétence mathématique de Hegel sur elle. Dans ce plaidoyers, nous sommes amenés à opposer le traitement des infiniment petits dans l'analyse non standard a celui des mathématiques modernes. On sait que celles-ci, dans un texte célèbre de Fraenkel, ont rejeté les infiniment petits «â moins qu'un deuxième Cantor ne vienne leur donner un fondement arithmétique inattaquable». Mais ce procédé d'exposition ne doit pas induire en erreur. Robinson n'est pas un anti-Weierstrass et l'analyse non standard, sous bien des égards, est un développement des «mathématiques modernes»- Les développements ultérieurs diront si Robinson est un «deuxième Cantor». Il est vrai que cela ne manque pas d'ambiguïté en 1984 : alors que dans l'esprit dé Fraenkel en 1928 il s'agissait d'un compliment, aujourd'hui, certains mathématiciens se demandent si le «paradis» où les a conduit Cantor n'était pas un «paradis artificiel»! La logique dialectique: une parenthèse sur la traduction de Hegel: Parvenu à ce point de notre lecture de Hegel à la lumière des développements de l'analyse mathématique, nous ne pouvons écarter plus longtemps le problème de la traduction française de Hegel. Notre travail de repérage des relations de Hegel et de Marx avec les mathématiques nous avait conduit à utiliser la traduction de S. Jankelevitch de la seconde édition de Hegel. (En outre, nous pensons que la pédanterie et/ou le mépris des traducteurs [dans lequel nous faisons figurer la paresse pour aller consulter les traductions], sont trop souvent, les explications principales des (re)-traductions). Dans le cas considéré, la fluidité de la traduction de Jankelevitch plaide pour elle-même, surtout si on la rapproche de la

[124] Nous présentons l'analyse non-standard d'après CE. Edwards, p. 341.

retraduction récente qui est en fait la traduction de la première édition de la Logique, l'édition de 1812, dont le français a, semble-t-il souffert de la fidélité — revendiquée- à Hegel. Néanmoins - et au-delà des faiblesses normales d'une traduction qui est, nécessairement une «approximation» nous devons convenir que cette traduction ne convient guère à notre grille de lecture de Hegel. Le problème essentiel touche la conception même de la logique de Hegel: comment comprendre le moment de la synthèse, du dépassement et comment traduire «aufheben» et «Aufhebung». Si l'on reprend attentivement la citation précédente de Hegel, nous lisons dans la traduction de Jankélévitch que: «Dans ce concept de l'Infini, le quantum s'élève vraiment à une existence qualitative (...) il n'est pas supprimé en tant que tel ou tel quantum mais en tant que quantum tout court». Cette traduction rend notre lecture acrobatique: Hegel semble bien dénier la qualité de nombre des dx, dy. Mais Hegel n'écrit pas (seulement) «est supprimé», il emploie un terme qui signifie «est supprimé, est conservé, est élevé» et même si l'on en croit Heidegger, c'est plutôt le sens de «transformation» qui prédomine, la suppression ne pouvant à la rigueur correspondre qu'au premier terme de la triade â condition de ne pas lui accorder un sens purement négatif (être écarté plutôt que supprime - annihilé). Écoutons la mise en garde d'Heidegger.

> «Aufheben signifie d'abord: enlever du sol ce qui y gît. Ce mode d’Aufheben reste pourtant extérieur tant qu'il n'est pas déterminé par un Aufheben signifiant: aufbewahren, conserver, réserver. Et encore cet Aufheben ne peut-il recevoir sa force portante et sa durée propre que s'il provient d'un Aufheben signifiant: élever, transfigurer, anoblir et ainsi: transformer»,

et Hegel lui-même, nous avertit qu'en général:

> «Aufheben (assumer) et das Aufgehobene (l'assumé) (l'idéel), c'est là l'un des concepts les plus importants de la philosophie, une détermination fondamentale qui revient absolument partout, et dont le sens doit être appréhendé de manière bien déterminée et surtout bien distingué du rien (Nichts). Ce qui s'assume (sich aufhebt) ne devient pas pour autant un rien. Si rien est un immédiat, un assumé au contraire est un médiatisé; c'est le non-étant, mais comme résultat qui est issue d'un être. Par suite il a encore en soi la déterminité dont il provient (herkommt)»,

et il reprend expressément cette affirmation au sujet des dx, dy. En effet si nous reprenons le texte hégélien traitant de la nature des différences infiniment petites, nous voyons Hegel ajouter:

«Mais la précision quantitative demeure, en tant Qu'élément, le principe des quanta ou, comme on l'avait dit, elle reste impliquée dans leur premier concept»[125].

Hegel nous indique bien que la «déterminité», la qualité (précision) des dx, dy leur est conservée ce qui justifie pleinement que nous rapprochions ce traitement de celui de l'analyse non-standard qui distingue plusieurs catégories de «nombres». Cette question est capitale d'après Hegel qui soutient que la «Aufhebung» est une détermination fondamentale qui revient absolument partout». D'ailleurs, Hegel jubile en constatant qu'en allemand de nombreux termes ont des déterminations opposées, même s'il n entend pas en demeurer à cette ambiguïté, jouer sur le double sens. Pour lui, le sens de la «Aufhebung» qui est la clé de la Logique ne peut être éclairé que par le déploiement de celle-ci. On comprend alors que Jean Beaufret ait pu s'exclamer: «Vous savez, il m'a fallu toute la vie pour comprendre quelque chose à Hegel» ou que Martin Heidegger, parlant précisément de l'infinité et de la finitude de l'être dans son commentaire de la *Phénoménologie de l'Esprit* en ait tiré un vibrant appel à la «patience»[126] (,..).

Pourtant, nous hasarderons quelques remarques destinées à éclairer notre lecture de Hegel. Tout, d'abord, nous relèverons que la suppression ou négation/conservation ne relève pas de la jonglerie métaphysique: c'est une opération qualifie de «courante» par J. Piaget et Kuhn a même tenté d'en faire le modèle des révolutions scientifiques: la nouvelle théorie «niant» l'ancienne mais en même temps la conservant comme un cas particulier d'un ensemble plus vaste (les théories de la mécanique céleste étant un archétype en la matière)[127]. Mais nous pensons aussi pouvoir affiner notre présentation grâce à une formalisation réduite. Hegel part de la proposition de Spinoza : Omnis determinano est negatio — que nous rendrions volontiers ainsi : tout énoncé d'une proposition A dit «quelque chose» de la proposition [non-A]. La dialectique de Hegel est alors l'examen des jeux ou des mouvements possibles de A et [non -AJ. Hegel, d'ailleurs, prend l'image du levier pour expliquer la Aufhebung[128]: Mais [non -A] n est pas le contraire, la pure négation de A - l'opposé ou l'inverse ne sont définis en mathématiques que pour des lois de composition spécifiées - de sorte que quand Hegel abat ses cartes, l'incompréhension ou l'incrédulité ne sont pas surprenantes: le logicien ne s est-il pas mué en prestidigitateur ayant plus de cartes dans son jeu qu'il n

---

[125] Cf. pour conserver/supprimer Heidegger, p. 13 (préface d'E. Martineau) et Hegel, SL, p. 101, WL, p. 1130, pour la définition de dx/dy Hegel, SL p. 279 WL p. 296.

[126] Hegel, 1ère édition de la «Logique», (repris également par E. Martineau, p. 14).

[127] Cf. Piaget, p. 595 et T. Kuhn, 1970.

[128] Cf. Hegel. SL, p. 102 et WL p. 114.

en avait montré au départ? C'est que [non –A] est multiforme pour le bonheur de ce que Bachelard appelait «la philosophie du non», mais au désespoir du lecteur. Pourtant même si ces règles paraissent (ou sont) souvent arbitraires, nous croyons que la «patience» pour démêler le jeu est récompensée.

Nous pouvons maintenant choisir une traduction pour la «Aufhebung». On sait que les candidatures sont nombreuses mais la rendre d'un°mot nous paraît incorrect: c'est à dessein que Hegel a retenu un terme «équivoque», aussi garderons-nous le rapprochement de la suppression et de la conservation et nous rendrons «aufgehobene» (la forme passive ou pronominale) par «supprimé/conservé». (Il existe d'ailleurs des constructions similaires en français, par exemple parmi les soties à l'égard du discours médical, il en est une qui dit d'un disparu, pour rendre un hommage «ironique» à la médecine: «il est mort guéri»). Au demeurant, nous avons conservé, pour l'essentiel, la traduction de Jankelevitch qui gagnerait seulement à être revue pour les parties les plus mathématiques.

L'analyse non-standard : une postérité mathématique de Hegel?

A présent, peut-on aller plus loin dans le rapprochement entre Hegel et Robinson, entre la suppression/conservation du Quantum et les «nombres non-standards»" Nous pensons que c'est bien le cas; en effet, les historiens des mathématiques n'ont pas manqué de relever les similitudes des définitions de Robinson et d'Euler, or Hegel connaissait Euler et il est significatif qu'il lui adresse peu de critique. Il est donc possible qu'il ait développé sa propre conception à partir des traces que l'on pouvait relever dans Euler (la double nature des différentielles: zéro et zéro qualitatif)[129]. C'est ainsi qu'après avoir longuement cité la méthode d'Euler, Hegel ajoute: «Je m'abstiens de multiplier les citations, celles qui précédent suffisant à montrer qu'elles contiennent bien le vrai concept de l'infini mais que celui-ci n'est pas mis en relief et conçu dans toute sa précision» ; cette proximité du concept est, sans doute, le plus grand compliment que Hegel pouvait décerner. Mais cette inspiration eulérienne commune ne constitue encore qu'un lien assez lâche et nous avancerons une hypothèse encore plus forte. Abraham Robinson a reçu une formation de logicien et il a été l'élève de A. Fraenkel, or ce dernier appartenait à la célèbre «école de Marburg», groupant philosophes et mathématiciens Cette école est qualifiée de néo-kantienne, mais il est frappant de constater que dans des temps où s'intéresser à Hegel, c'était s'exposer à la «risée générale», ses principaux représentants lui ont manifesté beaucoup d'attention. Précisément, le chef de file de l'école de Marburg, H. Cohen, a consacré un ouvrage au calcul différentiel dans lequel il entend montrer la

[129] Cf. infra «Sur le calcul des zeros de Leonard Euler» pp. 303-8 et Hegel. SL p. 288 etW.L., p. 304.

«supériorité de la méthode transcendantale sur la méthode métaphysique», càd de son interprétation du calcul différentiel par rapport à celle de Hegel. En effet, d'après H. Cohen, c'est dans la critique de l'infinitésimal que Hegel s est «exposé à son naufrage», mais ajoute-t-il, «la critique hégélienne toute défectueuse et fausse qu'elle est, contient pourtant des pensées profondes. Elle a le mérite de souligner l'importance pour ce concept de la qualité, du moment qualitatif de la quantité[130]. Si nous n'avons, ainsi, aucune indication d'une imprégnation hégélienne directe de Robinson, par contre, nous tenons pour hautement probable qu'il ait connu le livre de Cohen et, littéralement, le processus intellectuel aurait pu avancer par le côté négatif[131].

Les règles de calcul sur les différentielles

L'analyse non-standard permet aujourd'hui de justifier la distinction quantum (nombres traditionnels)/différentielles (parties non- standards des nombres) opérée par Hegel. Mais celui-ci a poussé plus loin son examen du calcul différentiel pour s'intéresser à ses règles particulières; en effet «le calcul infinitésimal autorise, exige même des procédés que les mathématiques, dans leurs opérations sur les grandeurs finies sont obligées de rejeter»[132]. Ainsi après avoir cherché à définir la nature des différentielles par un examen poussé du concept de nombre, il examine les règles que l'on doit employer pour «multiplier entre elles grandeurs finies et grandeurs infinies»[133]. II s'agit là essentiellement de l'abandon des puissances de dx-dy, des «infiniment petits» par rapport aux grandeurs finies. L'étonnement des mathématiciens du XVIIIe venaient de ce qu'une telle procédure manifestement incorrecte, eu égard à leur définition des grandeurs concernées, donnât des résultats non pas approchés mais «exacts». Parmi les «explications» avancées, Hegel rejette, d'abord, vivement celle de J. C. Wolf, le disciple infidèle de Leibniz, d'après laquelle les infiniment petits étaient négligés pour leur insuffisance relative, «car les mathématiques ne peuvent s'accommoder de telles approximations» ; il ne retient pas davantage — et daigne à peine les

---

[130] Nos développements - en particulier le choix des citations de H. Cohen - s’appuient sur Dussort 1963, pp. 115-117. Indiquons pour l'histoire des idées que c’est F. Lange qui fit attribuer une chaire à Marburg à H. Cohen, cf. note 23 p. 24 pour les rapports Lange - Marx et Lange - Nietzsche.

[131] Nous tenons de Raimon que les intellectuels du PSUC (le parti communiste de Catalogne) étudiaient «la pensée de Marx», sous le régime franquiste dans les années 55- 65, dans l'ouvrage du même nom de J.Y. Le Calvez, un jésuite en rien marxiste. (Raimon a été la figure de proue de la «nova canço catalana», expression de la résistance catalane au franquisme des années 60 et 70).

[132] Hegel. SL. pp. 265, WL p. 281

[133] Ibidem, SL p. 266, WL p. 281.

mentionner — les «explications» irrationnelles. Pour Hegel, l'explication est ailleurs: «la raison de les laisser de côté est tirée du caractère de leur quantum» ou «des termes sont laissés de côté, non comme insignifiants du point de vue de la grandeur, mais comme insignifiants sous le rapport de la qualité»[134]. Cette présentation hégélienne a été vivement critiquée, y compris par des auteurs qui veulent bien, par ailleurs, reconnaître quelques mérites à Hegel. J. T. Desanti parle d'un «procédé étrange», d'une «étrange soudure», d'une «opération spéculative», Kolman et Janovskaja sont plus radicaux — ou plus explicites —- il s'agit, d'après eux de «trucs et d'échappatoires»[135].

Le procédé décrit par Hegel est-il donc si incompréhensible mathématiquement, si étranger au raisonnement mathématique? Nous ne le pensons pas et nous le tenons pour comparable à l'analyse non-standard. En effet, celle-ci pose que les sommes, différences et produits d'infinitésimales sont des infinitésimales tandis que le produit d'une infinitésimale et d'un nombre fini est infinitésimal. Ce théorème permet de développer le calcul des dérivées de la façon suivante : deux éléments x, y eR sont appelés infiniment voisins, (notés : x ~ y), si leur différence x - y est infinitésimale. Et le théorème de la partie standard affirme que tout nombre hyperréel fini x est infiniment voisin d'un nombre unique réel r. Ce nombre réel r (r = x) est appelé la «partie standard de x» (noté = r = st (x)). Dans ces notations, les infinitésimales Δx sont infiniment voisines de 0: Ax = 0, et l'on dira qu'une fonction f d'une variable réelle est différentiable pour a eR pourvu que le quotient

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

soit fini et ait la même partie standard pour toute infinitésimale Δx = 0. La dérivée pour a est alors:

$$f(a) = st\left|\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right|$$

Dans cette définition qui, évidemment, aboutit aux résultats traditionnels, on obtient la dérivée directement en prenant la partie standard et en écartant les infinitésimales, cad en distinguant suivant la nature des termes; c'est dire si la similitude entre les régies décrites par Hegel et celles de l'analyse non-standard est profonde. L'aveuglement à rencontre

[134] Ibidem. SL. pp. 214-215. WL p. 312.
[135] J.T. Desanti, p. 61; Kolman et Janovskaia, p. 247

de Hegel est d'autant moins compréhensible que les opérations sur les nombres hyperréels présentent quelques analogies avec celles sur les nombres imaginaires et ce rapprochement aurait pu inciter à une condamnation moins sommaire. D'ailleurs, c'est Leibniz qui signalait cette analogie entre infiniment petits et imaginaires et peut-être Hegel poursuit-il simplement l'idée de Leibniz.

Nous en aurons terminé avec le calcul différentiel de Hegel en mentionnant un passage qui devrait retenir l'attention des économistes et les conduire à examiner les possibilités d'introduire l'analyse non-standard dans la présentation du raisonnement marginal. En effet, Hegel, développant sa conception de la nature des différentielles, s'intéresse à leur représentation. Voici ses remarques:

> On peut ajouter à ce propos que, puisque c'est seulement en raison du développement qu'on admet un accroissement qui n'est pas un quantum, il serait on ne peut plus indiqué de prendre comme tel le 1 (l'unité), puisque celui-ci ne figure toujours dans le développement qu'en qualité de facteur, et que le facteur 1 répond justement au but qui consiste à exclure la nécessité de poser une précision et une variation quantitative du fait de l'accroissement ; alors que dx, qui suggère la fausse idée d'une différence quantitative, et d'autres signes, comme i, entachés de l'inutile apparence de généralité, ont toujours ¡'aspect extérieur d'un quantum et de ses puissances et visent à s'imposer comme tels et à imposer en même temps la peine de les éliminer ou de les mettre de côté[136].

On retrouve ici la racine de l'ambiguïté des présentations du raisonnement marginal: «littérairement», le coût marginal est le coût de la dernière unité produite, mathématiquement c'est la limite de $\Delta C/\Delta Q$, càd la dérivée de la fonction de coût total. Dès le départ, l'exposé bute sur la continuité et/ou la discrétion des grandeurs économiques. Cela provient d'une conception insuffisante des accroissements considérés que l'analyse non-standard pourrait améliorer.

Ainsi l'analyse non-standard oblige à une relecture de Hegel dans la mesure où elle inscrit manifestement dans le champ mathématique les remarques de Hegel. Nous avons montré quelle était la fécondité de l'approche hégélienne basée sur l'analyse des concepts mis en œuvre dans les mathématiques dans le domaine même des mathématiques. Il est important de souligner que cette analyse repose une profonde

---

136 Cf. les citations de Leibniz, supra, pp. 56-58. La citation de Hegel est tirée de SL, i. 314, WL pp. 332-333. Celles de C. Menger sont pp. 40-41-42.

connaissance de la genèse et philosophique et mathématique de ces concepts. Il serait intéressant de poursuivre cette lecture de Hegel pour montrer précisément les mécanismes de cette approche logico-génétique ; là aussi des rapprochements inattendus, en particulier avec l'approche constructiviste contemporaine des mathématiques ne manqueraient pas d'être fructueux[137]. Il faut signaler, en particulier, dans ce contexte, la relation qu'établit Hegel entre le développement des mathématiques et leur correspondance avec le réel. Nous pourrons, néanmoins, aborder marginalement quelques- uns de ces thèmes en situant les MMM par rapport à Hegel. En effet, l'examen détaillé de Hegel n'est nullement une digression par rapport aux MMM mais est, au contraire, le prérequis pour les aborder.

[137] Cf. R. Apery, 1982.

CHAPITRE V
MARX ET LE MARXISME
FACE A HEGEL ET AUX MATHÉMATIQUES

La toile de fond hegelienne est indispensable pour situer les *MMM* et ce qu'ils peuvent nous apporter sur la philosophie de Marx et la philosophie mathématique. La présentation du calcul infinitésimal de Hegel rend manifeste l'origine des préoccupations de Marx. Comme il l'a écrit, Hegel n'était pas pour lui ce «chien crevé» que rejetait (que rejette?) la philosophie, aussi a-t-il pris au sérieux ses remarques sur le calcul différentiel et a-t-il cherché à les percer à jour. Cette fonction d'explication interdit, à notre avis, de comparer, sans précaution ce que disent respectivement Hegel et Marx, le livre et la glose. C'est pourtant ce que font, avec plus ou moins de préjugés «anti-idéalistes» ou matérialistes Kolman/Janovskaja et Smith[138] L'image de la dialectique hegelienne qu'il suffirait de remettre sur ses pieds a été prise dans un sens trop littéral, elle ne rend pas compte de la complexité du rapport Hegel/Marx. Pour essayer de la présenter il nous a paru indiqué de rejeter, d'abord, les caricatures simplificatrices qui en sont données. A cet égard, Kolman/Janovskaja présentent ce type de position d'une façon si exemplaire que nous nous baserons sur eux (cf. extraits cites en annexe). Ils s'efforcent, littéralement, de séparer le bon grain dialectique de l'ivraie idéaliste. Leur critique consiste à soutenir qu'il y a un objet - une matière - des mathématiques que Hegel n'aurait pas reconnu du fait de son «idéalisme». Restant, ainsi, dans son système philosophique, à côté ou extérieur à la mathématique, il aurait été conduit à des «déformations ou mystifications».

---

[138] C. Smith reconnait franchement l'influence considérable de Hegel sur lés MMM sans craindre dé commettre ainsi un crime de lèse-matérialisme; malheureusement, il ne semble pas avoir eu connaissance dé l'analysé non-standard et son évaluation de Hegel s'en ressent (cf. pp. 256-270, doc. cit.).

Ce serait, naturellement un exercice un peu facile de critiquer ces positions de 1930 qui s'achèvent sur une vibrante apologie de l'Union Soviétique, du Plan Quinquennal, de l'électrification... si elles ne réapparaissaient régulièrement dans la littérature «marxiste» où le «matérialisme» est souvent plus solide que la «dialectique». C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de les confronter à Hegel et à la lecture marxienne de Hegel. Par contre, nous n'entendons pas en tirer indirectement une critique de Engels et répéter «la Saynète du méchant Engels qui a fourvoyé le brave Marx» dont Engels lui-même se moquait dans sa lettre à Bernstein du 23 avril. Pourtant l'article cité s'appuie significativement sur dix références à Engels, trois à Lénine et une seule au *MMM*, mais nous estimons, en l'occurrence, que la partie la plus intéressante des *MMM* est postérieure à *l'Anti-Dühring* - pour lequel Marx a d'ailleurs aidé Engels - et qu'il faut tenir compte de l'inachèvement de la *Dialectique de la Nature* et c'est pourquoi nous nous abstiendrons donc de situer plus précisément Engels et de lui «donner un rôle» dans cette confrontation.

Les reproches essentiels qui sont faits à Hegel tiennent à l'articulation entre sa philosophie et les mathématiques d'une part, entre la théorie et la pratique d'autre part. Nous examinerons le second à la lumière des *MMM* eux-mêmes, mais nous pouvons immédiatement rejeter le premier sur la base de notre étude de Hegel. Certes, le discours de Hegel s'appuie sur (une critique de toute) la philosophie occidentale mais, en même temps, il s'en veut la clôture et prétend en prendre congé. Il ne s'enferme donc pas en un discours métaphysique et nous avons amplement montré comment il se situait dans et par rapport à la mathématique. Sur ce point, nous sommes conduits à corriger ce reproche d'extériorité aux mathématiques de façon analogue à la rectification apportée à la lecture traditionnelle des développements hégéliens sur le mauvais, infini et le vrai infini, c'est-à-dire en proposant une lecture plus attentive. Quand Hegel parle de mauvais infini, il ne faut pas retenir seulement l'adjectif, de même quand il dit que la mathématique est subordonnée («untergeordnet») par rapport à la logique, cela ne signifie pas que la mathématique est bornée. Il indique seulement qu'il y a un champ non-mathématique de la pensée et une «limite» de la mathématique; la logique qu'il tente de mettre en place est une tentative de savoir absolu dépassant (supprimant/conservant) les limites des domaines particuliers.

Cette perspective précise la démarche posée initialement. La *Logique* est une interrogation» sur la scission sujet/objet, pensée/réel conduite d'un point de départ comportant le moins de présupposes possibles; c¯est pourquoi l'introduction, d'ailleurs, était si difficile; c'est pourquoi, aussi, dans ce rapprochement de deux pôles, ou dans ce passage incessant pensée/réel, l'image du cercle utilisée par Hegel pour décrire l'Infini se présente spontanément. Mais alors le renversement «matérialiste» n'a guère d'objet (où est la tête, où sont les pieds?) et il n'est guère étonnant que nous n'en trouvions pas vraiment de trace dans les *MMM*. Nous estimons, d'ailleurs qu'un des grands mérites de ces *MMM* consiste à avoir pris au sérieux - comme un texte mathématique si l'on veut- ce que Hegel disait du calcul différentiel. C'est cette approche marxienne de Hegel que nous allons examiner à présent.

Les textes publiés, dans les *MMM*, suivent bien, en effet, les thèmes évoqués par Hegel. Pour notre part, nous les regrouperions, volontiers, autour de trois thèmes:

1) la nature des différentielles dx, dy

2) les règles d'utilisation des différentielles mises en évidence dans le calcul de la dérivée du produit de deux fonctions 3) l'histoire du calcul différentiel.

C'est la *nature des différentielles* qui a, d'abord, retenu l'attention de Marx. Refusant la méthode des limites et ne disposant pas de l'analyse non-standard, évidemment, Marx relève que le problème vient du passage de Δy, Δx à (respectivement) dy et dx. Il s'efforce de montrer comment des dy, dx apparaissent, non pas comme limite de Δ_y, Δx, mais comme *annulation* des Δy et Δx. C'est alors que Marx rencontre un problème, lié à sa lecture de Hegel: si dy/dx est une autre façon d'écrire $\Delta y/\Delta x$ quand $\Delta y = \Delta x = 0$, alors «dy et dx ne sont plus des quanta et n'ont pas la signification de quanta, mais leur signification leur vient de leur relation de ce qu'ils ne sont que des moments. Ils ne sont plus quelque chose de quelque chose étant pris comme quantum, ils ne sont pas des différences finies, mais ils ne sont pas non plus rien, un zéro dépourvu de toute détermination. En dehors de leur relation ils sont de purs zéros, mais ils ne doivent être pris que comme moments de la relation, comme détermination du coefficient différentiel dx/dy»[139].

Cette conception des dy, dx ne contredit pas les autres passages où Hegel parle des différentielles, mais elle soulève le problème de l'utilisation possible que l'on peut en faire dans le calcul différentiel. Hegel se contente généralement de la détermination des «différentielles» et de leur rapport mais si l'on veut aller plus loin, poursuivre les calculs sur les dérivées, l'imprécision relative à la nature des différentielles et aux règles les concernant ne peut manquer de se reposer. Hegel, lui-même, a vu le problème et il l'évoque en même temps que la conception eulerienne: «en désignant par des signes autres que zéro deux grandeurs dites Infiniment petites qui, tout en n'étant que des zéros, ne s'en trouvent

[139] 139. Hegel, SL, p. 279, WL, p. 295. La lettre de Engels à Marx du 10 août 1881 confirme complètement le caractère hégélien des préoccupations de Marx sur la nature dx, dy. Nous voyons meure un lapsus très significatif. Engels parle des «irrationnels» au lieu de dx, dy, confirmant que le problème est bien celui de la définition des nombres.

pas moins en rapport l'une avec l'autre, on use d'un procédé qui ne saurait être considéré comme satisfaisant».[140] Ces difficultés apparaissent encore plus nettement quand on étudie la dérivée d'un produit de fonctions ou d'une fonction de fonction puisque dy et dx vont être utilisés en dehors du rapport dy/dx. Hegel dit explicitement, en présentant Lagrange et butant sur cette question, qu'il laisse de côte ces difficultés, se retranchant par ailleurs derrière «le caractère tout à fait élémentaire qu'il a donne à son exposé»[141] .

Le manuscrit de Marx «Sur la différentielle» semble bien une tentative pour résoudre le problème laissé en suspens par Hegel. L'angle d'attaque de Marx relie ainsi les deux thèmes: nature des différentielles et utilisation. C'est là un des passages les plus «modernes» des *MMM* parce que le problème considéré se pose également si l'on raisonne en terme de limite et le logicien Glivenko a pu soutenir que le traitement de Marx annonçait celui de J. Hadamard[142]. Pour apprécier le jugement de Glivenko, il faudrait comparer les définitions de Marx (formules d'opérations ou symboles d'opérations) avec celles de J. Hadamard. Nous n'avons pu retrouver qu'indirectement une présentation de ces dernières, sous formé d'une citation contenue dans l'hommage de M. Fréchet. Nous reproduisons intégralement le passage la comportant:

> « 1. La différentielle dans l'analyse classique. - Supposant connue la définition de la différentielle d'une fonction d'une variable M. Hadamard a proposé (1) de définir la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables, par exemple, f(x,y), comme étant l'expression classique

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x}\,dx + \frac{\delta z}{\delta y}\,dy \qquad (1)$$

---

[140] Ibidem. SL, p. 287 et WL p. 304.

[141] Ibidem, SL p. 311 et WL p. 328, ci pour la citation, SL p. 310 ci WL p. 329. on voit assez bien pourquoi « il n'y a pas lieu de différencier en soi les équations telles que y = ax + b, -en effet Dy/Dx (= dy/dx) permet d'extraire immédiatement a et l'identité de Dy/Dx et dy/dx écarte la difficulté - par contre le reste du raisonnement de Hegel est moins évident.

[142] L'article de Glivenko est mentionné à la fois dans Smolinski et Kolman mais nous n’avons pu le consulter; il renvoie, semble-t-il, a un article d'Hadamard de 1923 dont Fréchet donne la référence sous la forme suivante: *La notion de différentielle dans l’enseignement (Scripta Univ. Ab. Hierosolymitanarum,, Jerusalem, , 1923).*

Mais, pour lui, cette expression n'est qu'un symbole d'opérations : «que signifie, dit-il, l'égalité (1)? Que si, *x*, *y* et dès lors *z* = f(x,y) sont exprimés en fonction d'une variable auxiliaire quelconque *u*, on a, quelles que soient ces expressions,

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{dx}{du} + \frac{\delta z}{\delta u}\frac{dy}{du} \qquad (2)$$

Tel est le sens unique de l'égalité (1). L'égalité (2) ayant lieu quelle que soit la variable indépendante en fonction de laquelle les deux autres variables sont exprimées, on supprime la mention de u. L'avantage précieux de la notation différentielle consiste précisément en la possibilité de ne pas préciser quelle est la variable que l'on considérera comme indépendante. »

Ce passage semble bien confirmer la relation établie par Glivenko, le rapprochement étant justifié non seulement par la similitude des dénominations pais aussi par le parallélisme des problématiques (dérivée du produits de fonctions).

D'ailleurs, on trouve une confirmation de l'importance attribuée par Marx à cette question dans son projet d'écrire une histoire du calcul différentiel centrée précisément autour de la dérivation du produit des fonctions. La encore, l'empreinte hégélienne est apparente puisque Hegel avait soulevé ce problème en étudiant un «curieux artifice » imaginé par Newton pour obtenir la dérivée de *xy*[143].

Il est intéressant de comparer la solution de Marx à l'état de la question dressée par Hegel et à la solution de l'analyse non-standard. Hegel a nettement marqué le caractère qualitativement différent des dx, dy par rapport aux nombres (partie standard) et c'est en insistant sur cet aspect qu'il prétend expliquer le calcul différentiel. Mais il ne va pas jusqu'à indiquer la nature des dx, dy, si ce n'est qu'ils sont des nombres «supprimés/conservés». A ce point précis, la solution de Marx représente une réponse alternative à l'analyse non-standard: au lieu d'exploiter ce qui, dans la formulation hegelienne pouvait conduire à une opposition à l'intérieur de la catégorie des nombres, la solution de Marx retient la suppression de la qualité de nombre et fait des dx, dy des symboles d'opérations. Marx, ici, écarte de la « Aufhebung» subie par les dy, dx les remarques sur la «précision quantitative qui demeure» pour ne conserver que celles sur la «suppression du quantum en tant que tel». L'interprétation marxienne de la nature des différentielles selon Hegel est, du point de vue de la mathématique standard, moins «étrange» que l'interprétation possible de nombres qualitativement différents. En effet,

---

[143] Hegel SL, p. 290, WL p. 308.

pour les fonctions d'une seule variable, dans le membre droit, on n'a jamais affaire qu'à des nombres standards, traditionnels et dans le membre gauche on prend acte de l'étrangeté du rapport q obtenu en faisant $x_1 = x$ en le baptisant «symbole d'opération», ce qui est également commode lors du passage a un produit de fonction, car on assiste alors à une prolifération de ces «symboles» (ce qui conduit Marx à une quête incessante de leur contrepartie «réelle») ; le renvoi à des opérations a effectuer est une façon de les neutraliser[144].

Il importe ici de souligner que la solution de Marx se situe dans la perspective ouverte par Hegel mais elle ne l'épuise pas; nous verrons plus loin qu'elle est bizarrement moins «matérialiste» que celle de l'analyse non-standard, mais on peut noter immédiatement qu'elle a l'inconvénient de rendre une interprétation mathématique des règles «hégéliennes» du calcul avec les dy, dx très problématique. Mais réservant pour conclure une évaluation plus globale, il nous reste, à présent, à envisager la relation pratique/théorie qui se dégage des MMM.

On a affaire ici à une aventure de la dialectique qui mérite un examen approfondi. En effet, les auteurs qui se proclament «matérialistes» ou qui se réclament du «matérialisme dialectique» n'ont de cesse de rappeler tout le contexte matériel qui entoure les mathématiques, Trois propositions sont avancées: 1) les mathématiques se développent pour répondre aux besoins de la pratique, 2) «les processus du raisonnement mathématique sont des processus matériels», 3) «les mathématiques fondamentales» ne seraient qu'un jeu tout excitant soit-il, si leur «horizon» ne comportait pas, à titre essentiel, le moment de l'application pratique»[145]. C'est le projet brillamment analysé par J.T. Desanti de «décrire tout le système de la mathesis comme un ensemble de chaînes instrumentales, ancré, en dernière analyse, dans le champ de la physique»[146]. Desanti estime ce projet «difficile et vain», difficile parce qu'il obligerait à une manipulation des mathématiques pour les ordonner retro

---

[144] M. Yacoubsohn, inversement, écrit au sujet de l'analyse non-standard: «Rien n'est plus matérialiste que cette démarche: I...I on ne cherche plus a des symboles une base réelle, mais bien au contraire, on trouve dos symboles pour exprimer le concret»- Nous n'approfondirons pas la question de la réalité ou du concret des nombres non-standard (et standard, d'ailleurs) ici.

[145] P. Cazelles, pp. 19 et seq.

[146] J.T. Desanti affirme qu'à s'en tenir au champ de la mathesis, «on aurait bien du mal a vérifier directement quelle met en couvre le matérialisme minimal"- Il distingue alors trots voies: la première qui en ferait une science avant sa matière propre -réductionnisme a une intuition sensible, la seconde, celle d'un «réalisme des structures» décrit la position platonicienne, la troisième appelée ,instrumentalisme» est celle que nous ayons retenu car correspondant le mieux a ce que les «matérialistes» disent d'eux-mêmes.

herméneutiquement d'après leur application et inutile parce qu'il montrerait seulement que souvent la mathématique permet des modèles physiques adéquats sans pour autant nous donner la clef de cette adéquation. Sur ces questions, les MM permettent d'évaluer la «pratique» de Marx a défaut de nous livrer une épistémologie. Marx ne renvoie jamais à une pratique extérieure aux mathématiques au sens étroit du terme. Cela mérite d'autant plus d'être relevé que nous avons souligné le rôle des instruments de mesure et des besoins nés de pratiques sociales dans le développement du calcul. Or quand Marx parle de la «réalité»: c'est pour opposer différents niveaux d'abstractions mathématiques - Marx, d'ailleurs, utilise le vocabulaire hégélien dont on sait qu'il distingue deux réalités: passive et active, en quelque sorte (Realität et Wirklichkeit). Il est vrai que l'occurrence de ces emplois est trop faible pour que l'on puisse être sûr que son usage est parfaitement réfléchi et maitrisé[147]. Dans trois passages, Marx explique des évolutions du calcul différentiel par i'«expérimentation» ou la «pratique»; malgré le caractère lapidaire de ces passages, leur sens ne fait pas problème, surtout rapproché de développements, identiques, correspondants chez Hegel: Marx indique simplement que les résultats du calcul différentiel n'ont pas toujours été obtenus par la théorie (au contraire, dans le calcul différentiel des origines c'est bien souvent les résultats qui justifient les règles du calcul) mais au contraire par des pratiques de tâtonnement. Il est exact que par essai et erreur on peut facilement «trouver» les dérivées d'un grand nombre de fonctions. On conviendra qu'il n'y a pas là une pratique au sens habituel du «matérialisme»; à moins d'y voir un exemple de la catégorie fourre-tout de la «pratique théorique» dont la capacité absorbante est l'inverse du pouvoir explicatif.

Nous pensons même que curieusement le choix opéré par Marx dans sa lecture de Hegel est beaucoup plus éloigné du « matérialisme » que ne l'est l'analyse non-standard. En effet, comme le souligne Harthong ce sont les physiciens qui ont conservé l'usage des infiniment petits pour des raisons de commodité et parce que dans leur pratique, la «rigueur» est bornée par la précision limitée des mesures. L'intérêt de l'analyse non-standard, pour eux, réside dans l'introduction dans la mathématique de l'échelle des grandeurs (la qualité de la quantité), unité de la rigueur et de l'approximation. Ce n'est pas comme nous l'avons vu la direction prise par Marx en voyant dans les dx, dy, des symboles d'opération. On peut même dire que les MMM sont en «retrait» par rapport à la Note II de Hegel «le but du calcul différentiel déduit de son application» en ce sens qu'il n'y apparaît point de téléologie susceptible d'introduire une «matière» ou une «pratique», mais peut-être le silence de Marx indique-t-il simplement son accord complet avec Hegel là-dessus.

---

[147] Cf. supra note 78 et index: «réel».

CONCLUSION

Ainsi le long détour par la *Logique* de Hegel s'est révélé un point de passage obligé pour situer les *MMM;* ceux-ci qui sont le résultat de vingt années de travail de Marx sur des mathématiques de la *Science de la Logique* devraient, à tout le moins, provoquer un réexamen des thèses de la « coupure » et ruiner certaines discussions byzantines pour situer «la» rupture Marx-Hegel. Par exemple, Althusser écrivait que «L'œuvre si importante de Della Volpe et Coletti en Italie (...) suppose bien l'existence d'une coupure entre Hegel et Marx, entre Feuerbach et Marx, mais elle situe cette coupure en 1843 au niveau de la Préface à la *Critique de la Philosophie du Droit de Hegel* et au contraire, pour sa part, Althusser affirme que les *Manuscrits de 1844* sont «un brusque et ultime retour à Hegel»[148].

Gérard Granel a, déjà, montre que le problème était, avant tout celui de la rupture avec le «philosophique», entraînant la complexité et la multiplicité des «sorties de la métaphysique d'elle-même» - ce qui lui a permis, au passage, de relever la continuité entre les textes de 1844 et ceux de 1845[149]. Cette rupture avec la métaphysique, nous avons vu que c'était le projet qui animait déjà Hegel dans la *Logique.* Comment croire alors qu'il soit si facile - au prix d'un «brusque» retour» - de «se couper de lui» ou de le «renverser»? G. Lebrun apporte ici une réponse particulièrement appropriée: «On ne critique jamais Hegel sans s'exposer à lui adresser des griefs qu'il aurait été vraiment léger de ne pas prévoir»[150]?

Au contraire, les *manuscrits mathématiques* montrent que Marx «n'en a jamais eu fini» avec Hegel, ce qui représente le plus bel hommage à ce dernier. Dès lors compte tenu du caractère elliptique des *MMM.* C'est dans la *Science de la Logique* qu'il faudra aller chercher la réponse à

---

[148] Althusser, pp. 28 et 30. 149. 150.
[149] Cf. G. Granel p. 267-320.
[150] G. Lebrun, p. 408.

notre interrogation sur la formalisation d'une science sociale et en particulier critique. Et la volée de bois vert qu'inflige Marx à MacLeod semble bien être une réplique - sans nuances - de l'étrillage par Hegel de

> «ceux qui, de nos jours, voudraient de nouveau mettre les nombres et les déterminations numériques, telles que les puissances, ainsi que (...) d'autres déterminations analogues, qui ne sont souvent qu'un formalisme mathématique déplacé, à la place des déterminations conceptuelles, et retourner à cette enfance impuissante qu'ils vantent comme un état idéal et profond»[151].

L'économie, qui est aujourd'hui l'une des rares disciplines - avec la physique théorique - à faire un appel considérable aux mathématiques, est particulièrement sensible à ces risques de fétichisation des mathématiques d'autant que le divorce entre modèles théoriques et «réalité» y apparaît croissant vertigineusement. Les déclarations de G. Debreu reproduites (mal, espérons-nous, pour le Prix Nobel) dans le Figaro où il affirme

> «c'est l'économie de marché, c'est-à-dire la liberté de produire et de commencer qui, dans tous les cas, aboutit aux meilleurs résultats mathématiques. A l'inverse, je peux prouver de manière tout aussi scientifique, comment les interventions de l'État perturbent le marché ou nuisent à la croissance»[152].

illustrent bien les ravages de la fétichisation des mathématiques qui conduit à prendre les modèles pour la réalité (la carte pour le territoire) et à faire même oublier leurs conditions de validité.

Mais si nous revenons à Hegel il faut aussi interpréter dialectiquement cette condamnation. Hegel nous dit que les nombres ne doivent être pris à la place des déterminations conceptuelles, la question est donc de déterminer le champ légitime de leur application. Cette question est souvent évoquée de sorte qu'elle ait déjà dévoilé sa complexité et c'est pourquoi nous ne pouvons que faire écho à Heidegger: «La patience, c'est la modalité véritablement humaine de la supériorité sur les choses. La vraie patience est l'une des vertus fondamentales du philosopher celle qui comprend que nous devons constamment dresser le bûcher avec du bois approprié et choisi, jusqu'à ce qu'il prenne feu enfin»[153] et relever que Marx l'a apprise au contact de Hegel au point de faire avancer pendant vingt ans une réflexion sur le «calcul».

[151] Hegel revient a plusieurs reprises sur cette critique de Pythagore et des Pythagoriciens "modernes". Parmi ces derniers, il visait certainement la position de Kant, mais peut-être aussi la Kabbale et Wolf (cf. J. D'Hondt sur les liens éventuels entre Hegel et la pensée ésotérique).

[152] Cf. Figaro Magazine du 10 mars 1984.

[153] M. Heidegger, pli. 123-124.

BIBLIOGRAPHIE

L. ALTHUSSER, Pour Marx, F. Maspero, Paris, 1967.
R. APERY, Mathématique Constructive in Penser les Mathématiques (Collectif), Seuil, Paris, 1982.
R. BLANCHE, La logique et son histoire, A. Colin, Paris, 1970.
W.J. BAUMOL and A.S. BINDER, Economics, Harcourt, New York, 1979.
J. BIARD et alii., Introduction à la lecture de la Science de la logique de Hegel Aubier Paris.1981.
N. BOURBAKI, Éléments d'histoire des mathématiques, Snde Édition, Hermann, Paris, 1969.
M. BLAUG, La pensée économique, Economica, Paris, 1982.
C.B. BOYER, The history of the Calculus and ifs conceptual development (the concepts or the Calculus), Dover, 1939 et 1949.
L. BRUNSCHVICG, Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, 1912 (3° édition. PUF, 1947).
M. CANTOR, Vorlesungen aber die Geschichte der Mathematik, tome III Leipzig, 1898. tome IV, Leipzig, 1909.
E. CASSIRER, Leibniz' System, Marburg, 1902 (réimpression 1962, Hildesheim).
A.L. CAUCHY, Leçons sur le calcul différentiel, Paris, De Bure, 1829.
P. CAZELLES, Mathématiques et matérialisme dialectique, La Nouvelle Critique, Paris. 1971.
A.A. COURNOT, Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. Paris, Hachette. 1841.
G. DEBREU, La supériorité du libéralisme est mathématiquement démontre, entretien avec G. Sorman, paru dans le Figaro Magazine du 10 mars 1984.
J.T. DESANTI, La philosophie silencieuse ou critique des philosophies de la science. Paris. Le Seuil, 1975.
J. DIEUDONNE, Mathématiques vides et mathématiques significatives, in Penser les mathématiques, Le Seuil, Parts, 1982.
A. DONNEDU, Les bases de l'analyse mathématique moderne, Dunod. Paris. 1963.
P. DUGAC, Richard Dedekind et les fondements des mathématiques, préface de Jean Dieudonné, Vrin, Paris, 1976.
H. DUSSORT, L'école de Marburg, textes rassemblés par Vuillemin. PUF, Paris. 1963.
P. DAVIS, R. HERSH. The mathematical experience, Harvester, Bringhton. 1981.
C.H. EDWARDS jr, The Historical Development of the Calculus, Springer. New York, Heidelberg, Berlin, 1979.
J. ELSTER, Marx et Leibniz, Revue philosophique, 2, avril-juin 1983.
F. ENGELS, Dialectique de la Nature, Éditions Sociales, Paris, 1968.
F. ENGELS, Anti-Dühring, Éditions Sociales, Parts, Snde Edition, 1963.
E. FLEISCHMANN, La Science Universelle ou la Logique de Hegel, Pion, Paris, 1968.
A. FRAENKEL. Set theory and logic, Addisson-Wesley, USA, 1966.
M. FRÉCHET, Sur la notion de différentielle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, juillet-septembre 1937.
G. FREGE, Funktion, Begriff, Bedeutung, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1962.
Ch. de FREYCINET, De l'analyse infinitésimale, étude sur la métaphysique du haut calcul, Paris. Mallet Bachelier, 1860.
R. FRIEDENTHAL, Karl Marx, Sein Lehen und seine Zeit, 1981, (2e édition, DTV, München, 1983).
H.G. GADAMER, L'art de comprendre, Aubier-Montaigne, Paris, 1982.
G. GRANEL, Incipit Marx, paru dans L'endurance de la pensée (hommages à J. Beaufret),

Plon, 1968 repris dans Traditio Traditionis, Gallimard, Paris.
R. GUENON, Les principes du calcul infinitésimal, Gallimard, Paris, 1946.
J. HADAMARD, Œuvres complètes, CNRS, Paris, 1968.
J. HARTHONG, L'analyse non-standard, La Recherche, 148, octobre 1983, pp. 1195-1201.
G.W.F. HEGEL, Les références allemandes renvoient à Werke in zwanzig Bänden, Suhrkamp. Francfort, 1969, nouvelle édition par E. Moldenhauer et K.M. Michel, a partir de l'édition de 1832-1845. La «Grande Logique» ou « Wissenschaft der Logik» constituent les tomes 5 et 6. Toutes les citations sont tirées de la première partie Die obiekhve Logik (tome 5) et indiquées dans les notes par WL. (Une seule citation renvoie à la petite Logique (Encyclopedie der philosophischen Wissenschaften) elle est indiquée par EL.
G.W.F. HEGEL. Les traductions françaises utilisées sont les suivantes: Science de la Logique traduction de S. Jankélévitch, Aubier, édition de 1969 en 4 volumes; (la Logique de l'être occupe les tomes 1 et 2). Les références en notes sont indiquées par SL.
Principes de la philosophie du droit, traduction de A. Kaan et notice de J. Hyppolite, Gallimard, Paris, 1940 (réimpression 1963).
La théorie de la mesure, PUF, 1970, traduction et commentaire de A. Doz (3° section du 1° livre de la Logique)
De orbitis planetarum (nous avons fait référence à des notes de Bourbaki, p. 26 et Doz/Hegel. p. 169. Nous avons consulté (plus marginalement) la traduction de la 1ère édition de la Logique par P.J. Labarrière et G. Jarczyk, Aubier, 1972.
M. HEIDEGGER, Traité des catégories et de la signification chez Duns Scot traduction de F. Gaboriau. Gallimard, Paris, 1970.
La Phénoménologie de l'esprit de Hegel, traduction de E. Martineau Gallimard, Paris, 1984.
P. HUMBERT, Les mathématiques au XlXe siècle, dans Histoire de la Science, sous la direction de M. Daumas, Encyclopédie. de la Pléiade Paris, 1957.
S. JANOVSKAJA, Préface aux MMM, édition russe 1968, traduction allemande dans Sowjenvissenschaft. Berlin, 1969, traduction anglaise, MMM, 1983.
J.M. KEYNES, La théorie générale de l'emploi, de l'intérêt, de la monnaie, Londres, 1936, trad. française, Payot, Paris, 1942.
NI. KLINE, Mathematical Thought from Ancient to Modern Titres, New York, Oxford University Press, 1972.
E. KOLMAN, Karl Marx et les mathématiques, 1968, Moscou et MMM, édition anglaise, 1983.
E. KOLMAN et S. JANOVSKAJA, Hegel et les mathématiques, 1931 et MMM, édition anglaise, 1983.
A. KOYRÉ, Études d'histoire de la pensée scientifique, PUE, Parts, 1966. Gallimard, Paris, 1973.
A. KOYRÉ, Du monde clos à l'espace infini, PUE, Paris, 1962.
H. LAURENT. Traité d'analyse, tome I, Calcul différentiel, Paris, Gratiner Villars, 1885.
G. LEBRUN, La patience du concept, Gallimard, Paris, 1972.
W.I. LÉNINE, Cahiers sur la dialectique de Hegel, Snde Edition française. Gallimard, Paris, 1967.
Lexikon der Mathematik, VEB, Leipzig, 1981.
A. LICHNEROWICZ, Remarques sur les mathématiques et la réalité, in Piaget, pp. 474 à 485.
G. MAAREK, Introduction au «Capital» de K. Marx, Calmann Levy, Paris, 1975.
K. MARX, Matematicheskie rukopisi, Moskva, Nauka, 1968
K. MARX, Mathematische Manuskripts, édité avec une introduction et des commentaires de W. Endemann, Scriptor, Kronberg, 1974.
K. MARX, The mathematical manuscripts of Karl Marx, New Park Publications, London, 1983.

Karl MARX in seinen Briefe (choix de lettres souvent inédites, édité et commenté par S.K. Padover), Beck; Moucher, 1981 (une 1ère édition anglaise était parue en 1979).
P. MATTICK, Crises et théories des crises, Champ Libre, Paris, 1976.
K. MENGER, Austrian Marginalism and Mathematical Economic in Carl Menger and the Austrian School Economics, édité par J.R. Hicks et W. Weber, Oxford, 1973.
A. MILEJKOVSKI, Marx and economic planning dans Marx et la pensée scientifique contemporaine.
M. MORISHIMA, Marx's Economics, A Dual Theory of Labour and Growth, Cambridge University Press, 1973.
M. MORISHIMA, G. CATEPHORES, Valeur, exploitation et croissance, traduction française, Economica, Paris, 1981 London, 1978).
C. MURGESCU, La présence de Marx dans Marx et la Pensée Scientifique Contemporaine (The Hague: Mouton, 1970).
V. PARETO, Les systèmes socialistes, Parts, 1902-1903, cité d'après l'édition Droz, Golevé, 1965.
1. PIAGET (sous la direction de), Logique et connaissance scientifique, Encyclopédie de la Pleiade, 1976.
G. REEB, La mathématique non-standard, vieille de soixante ans? Strasbourg, IRMA, 1979.
A. ROBINSON, Non-standard analys, Revised édition, Amsterdam, North Hotland, 1974.
J. ROBINSON, L'économie de Marx, Dunod, Paris, 1970.
R. PETER, Jeux avec l'infini, Le Seuil, Paris, 1977 pour la traduction française.
B. RUSSEL, Introduction à la philosophie mathématique, Payot, Paris, 1961.
B. RUSSEL, History of western philosophy, London, George Allen et Unwin, 1946, 2e édition, 1961.
A. SHAIK, The poverty of algebra, in *The Value Controversy*, édité par I. Steedman et P.M. Sweezy, Verso, London, 1980.
A. SILESIUS, Der cherubinische Wandersmann, 1657. cité d'après les choix faits et présentés par E. Haring, Reclam, Stuttgart, 1950 et 1983.
L. SMOLINSKI, Kart Marx and Mathematical Economics, Journal of Political Economy, Sept. Oct. 1973.
J. SCHUMPETER, HISTORY OF ECONOMIC ANALYSIS, Allen and Unwin, 1955. (OUP 1954).
C. SMITH, Hegel, Marx et le « Calcul», MMM, édition anglaise, 1983.
R. THOM, Mathématiques modernes et mathématiques de toujours et Mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique? in Pourquoi la mathématique, collectif: UGE, 10/18, Paris 1974.
R. THOM, Mathématique et théorisation scientifique, pp. 252-273, in Penser les Mathématiques. 1982.
CH. J. de la VALLÉE-POUSSIN, Cours d'analyse infinitésimale, Louvain, Paris, 1909.
J. WESLEY YOUNG, Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry, Macmillan, New York, 1911.
C. WILSON, Star seekers, Granada, London, New York. 1982.
J.C. YAKOUBSOHN, Commentaires sur les MMM; été 83, Toulouse.
J. ZELENY, Rationalité et Évolution dans Marx et la pensée scientifique contemporaine, 1968. Die Wissenschaftlogik und der «Kapital». Frankfort. 1969, (traduction anglaise, B. Blackwell, 1980, l'original est écrit en tchèque).
[Les ouvrages concernant les mathématiques de Marx sont regroupés dans une bibliographie séparée.]

Extraits de «Hegel et les Mathématiques»
d'Ernest Kolman et Sonia Janovskaja
(article paru dans *Unter den Banner des Marxismus,* 1931)

Les auteurs dressent un véritable bilan «matérialiste» de Hegel. Nous en avons tiré le résumé ci-après:

> « Nous matérialistes dialectiques situons les mérites de la philosophie hégélienne dans le domaine des mathématiques dans le fait que Hegel:
>
> «1) a été le premier à définir brillamment la genèse objective de la dialectique de la qualité.
>
> 2) a correctement déterminé l'objet des mathématiques et, en conséquence, également, leur rôle dans le système des sciences et donné une définition essentiellement matérialiste des mathématiques qui écrase la structure de la conception bourgeoise avec son fétichisme de la quantité si caractéristique (Kant et le pan-mathématisme).
>
> 3) reconnu que le domaine du calcul différentiel et intégral n'est plus un domaine purement quantitatif mais qu'il contient déjà des moments qualitatifs et des traits qui sont caractéristiques du concept concret (unité des moments en contradiction interne), et que par conséquent,
>
> 4) toute tentative pour ramener le calcul infinitésimal à la mathématique élémentaire, pour supprimer le saut qualitatif qui les sépare, doit, d'emblée, être considérée comme sans espoir.
>
> 5) que la mathématique, sur ses propres bases, sans l'aide de la pensée philosophique théorique n'est pas en mesure de justifier les méthodes qu’elle met déjà en œuvre.
>
> 6) que l'origine du calcul différentiel a été provoqué, non pas par les exigences du développement autonome des mathématiques, mais que sa source et son fondement se trouvent dans les exigences de la pratique (le noyau matérialiste!).
>
> 7) la méthode du calcul différentiel est analogue à certains processus naturels et par conséquent ne peut pas être saisie à partir d'elle seule, mais, à partir de l'essence du domaine où ces méthodes sont appliquées.
>
> Les faiblesses, erreurs de la conception hégélienne des mathématiques qui découlent de façon implacable de son système idéaliste, reposent, considérées d'un point de vue matérialiste, sur le fait que:
>
> 1) Hegel croyait que la méthode de calcul différentiel dans son ensemble était étrangère aux mathématiques de sorte que l'on ne puisse trouver, à l'intérieur des mathématiques, aucune transition

entre les mathématiques élémentaires et supérieures, ainsi les concepts et les méthodes de ces dernières ne peuvent être introduits dans les mathématiques que d'une façon extérieure et arbitraire, à travers un réflexion extérieure et ne peuvent pas apparaître à travers le développement dialectique comme une unité de l'identité et de la différence de l'ancien et du nouveau.

2) il pense qu'une telle transition n'est concevable qu'extérieurement aux mathématiques, dans son système philosophique, ainsi il est forcé de transporter la vraie dialectique du développement des mathématiques dans son système philosophique.

3) mais il procède ainsi souvent d'une façon déformée et mystifiante et ce faisant, il remplace les relations réelles alors inconnues par des relations idéales, fantastiques et crée ainsi une solution apparente où il n'aurait du poser qu'un problème encore irrésolu et il entreprend de la démontrer et de la prouver dans les mathématiques de son temps, ce qui, souvent, était simplement faux.

4) il considérait le développement effectif des mathématiques comme un reflet du développement des catégories logiques, des moments du développement autonome de l'idée et il rejette la possibilité de construire des mathématiques qui appliqueraient consciemment la méthode dialectique et seraient, par conséquent, capable de découvrir la vraie dialectique du développement de leurs propres concepts et méthodes et qui n'intégreraient pas les moments qualitatifs et contradictoires à travers une réflexion extérieure.

5) c'est pourquoi non seulement, il n'est pas en mesure de définir la reconstruction des mathématiques par la méthode dialectique mais il est forcé de courir derrière les mathématiques de son époque en dépit des critiques correctes qu'il fait à leurs méthodes et concepts fondamentaux.

6) il préfère les démonstrations de Lagrange du calcul différentiel non pas parce qu'elle dévoile les relations réelles entre les mathématiques du fini (algèbre) et de l'infini (analyse) mais parce que Lagrange introduit le quotient différentiel dans les mathématiques d'une façon purement externe et arbitraire, en quoi Hegel reste fidèle à l'habituelle interprétation superficielle de La-range.

7) il rejette la possibilité de mathématiques dialectiques et dans ses efforts pour réduire la signification des mathématiques plus que cela n'est justifié, il rejette totalement les moments qualitatifs (dialectique) des mathématiques élémentaires (arithmétique) Cependant comme leur présence était manifeste pour un dialecticien comme Hegel, tandis qu'il les élimine d'un endroit (dans le chapitre sur la *Quantité)* il devait les réintroduire dans un autre *(Mesure)*»,

INDEX DES NOMS